exploding dots

GLOBALMATHPROJECT

buzzmath

MECHANIA

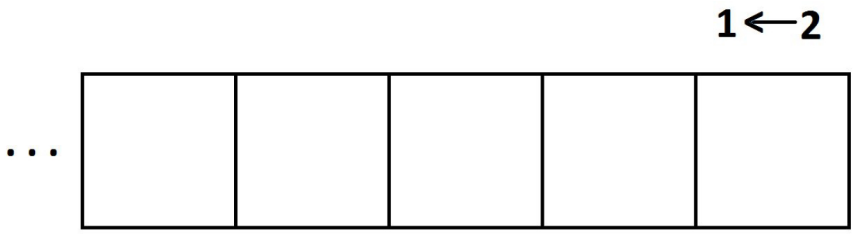
HOOFDSTUK 1

EXPLODING DOTS
CHAPTER 1

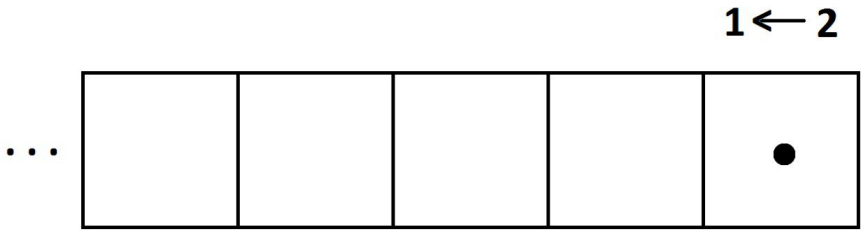
MACHINES

Welkom in de wereld van wiskundige machines.
Een fictief verhaal van James Tanton, over exploderende stippen.

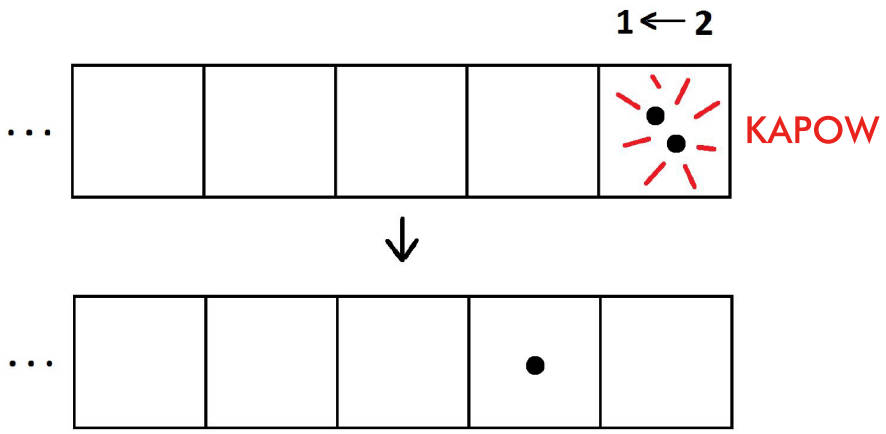
Als kind bedacht hij een machine, om te spelen met nummers in de vorm van stippen. Deze machine bestaat uit een rij vierkantjes, die oneindig ver naar links kan worden verlengt. Deze machine noemde hij de 'twee-één machine'. Zowel in spraak als in schrift koos hij voor een grappige omgekeerde versie.



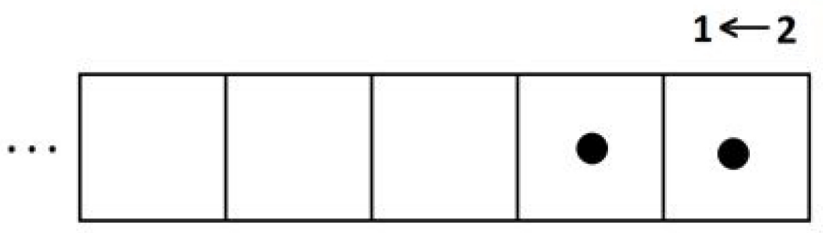
Wat kun je met deze machine? Je kunt er stippen in stoppen. Deze stippen plaats je altijd in het meest rechtste vierkantje. Als dit vierkantje maar één stip telt, dan gebeurt er niks. Maar plaats je er een tweede stip bij, dan gebeurt er iets spannends!



Telkens als er twee stippen in een vierkantje staan, dan exploderen en verdwijnen ze (KAPOW), om vervolgens in de vorm van één stip te verschijnen in het vierkantje links van het vierkantje waaruit de twee stippen verdwenen zijn.



Zie en begrijp je waarom James deze machine de 'twee-één machine' genoemd heeft? Twee stippen in het meests rechtse vierkantje in de machine staat gelijk aan één stip in het vierkantje één stap verder naar links in de rij vierkantjes. Het resultaat is dan: 10 (1 stip in het twee vierkantje van rechts en 0 stippen in het meest rechtse vierkantje.

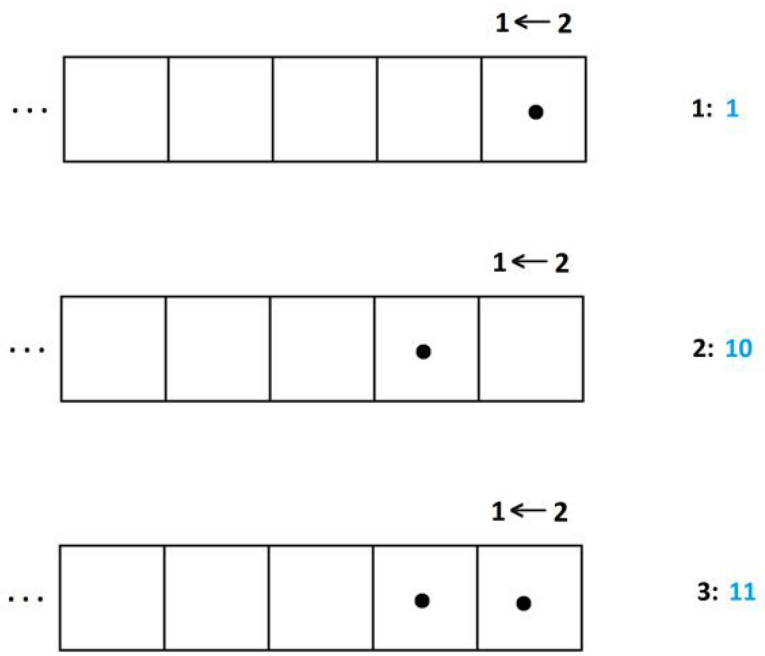


James zijn fictieve verhaal deed hem realiseren dat de machine een cijfer codetaal wist te schrijven voor aantallen.

De machinecode voor het aantal 1 = 1, want één stip in de 2 ← 1 machine blijft één stip.

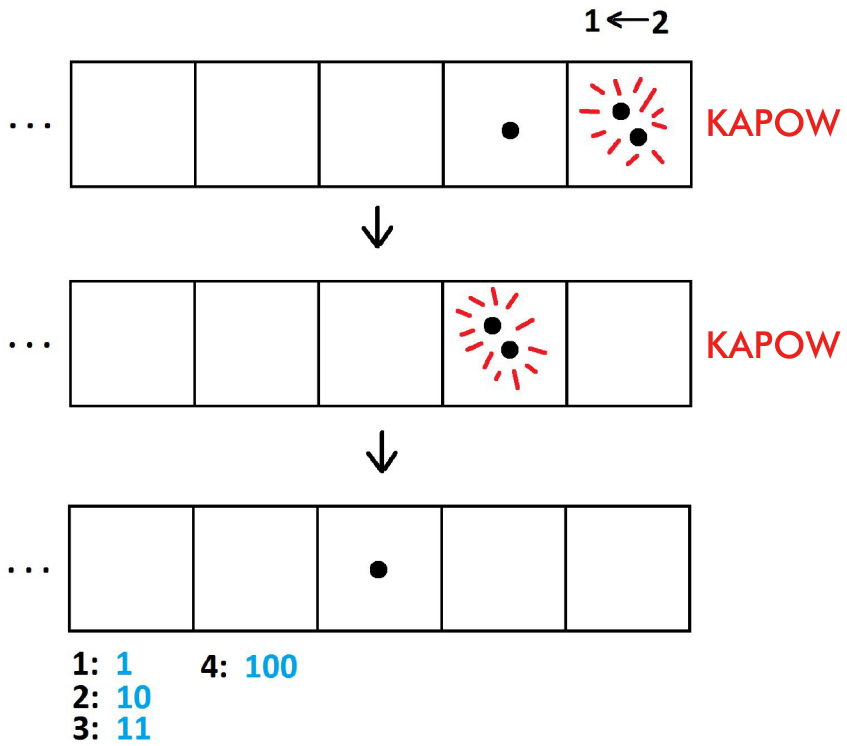
De machinecode voor het aantal 2 = 10, want twee stippen in de 2 ← 1 machine veranderen in één stip in het vierkantje één stap verder naar links en daardoor 0 overblijvende stippen in het vierkantje rechts.

Een derde stip toevoegen aan de machine (altijd in het meest rechtse vierkantje) resulteert in de code 11.



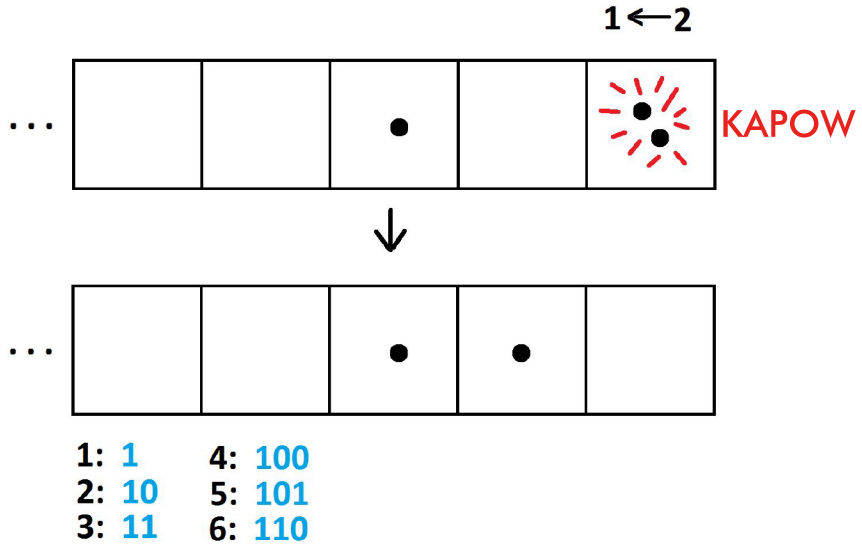
Wat is de machinecode voor vier stippen?

Het antwoord op deze vraag is behoorlijk spannend. Een vierde stip toevoegen aan de machine veroorzaakt namelijk een dubbele explosie!

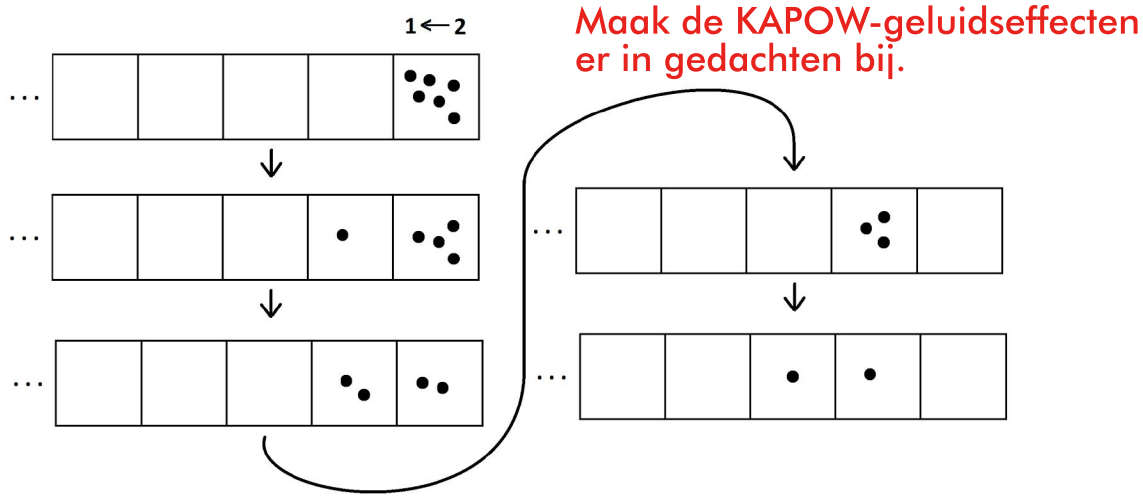


De 2 ← 1 machinecode voor vier stippen = 100.
Begrijp je dat de machinecode voor vijf stippen 101 is?

En wat is de machinecode voor zes stippen? Één stip toevoegen aan de machinecode voor vijf stippen geeft weer een explosie in het meest rechtse vierkantje. Wat resulteert in de machinecode 110 voor zes stippen.



Als je alle zes de stippen tegelijkertijd plaatst in het meest rechtse vierkantje en vervolgens per twee stipppen een explosie laat plaatsvinden, door telkens twee stippen uit te wissen en één nieuwe stip hiervoor in de plaats te noteren in het vierkantje één stap naar links, dan zul je zien dat de machinecode voor zes stippen ook dan 110 is.



Blijft de machinecode hetzelfde als je de explosies in een andere volgorde laat plaatsvinden? Probeer het!

Uitdagende vragen om te beantwoorden*:

1. a) Wat is de 2 ← 1 machinecode voor dertien stippen?
   b) Wat is de 2 ← 1 machinecode voor vijftig stippen?

2. Kan een x aantal stippen gelijk staan aan machinecode 100211? Er vanuit gaande dat je twee stippen alijd laat exploderen.

3. Hoeveel stippen staan gelijk aan code 10011 in een 2 ← 1 machine?

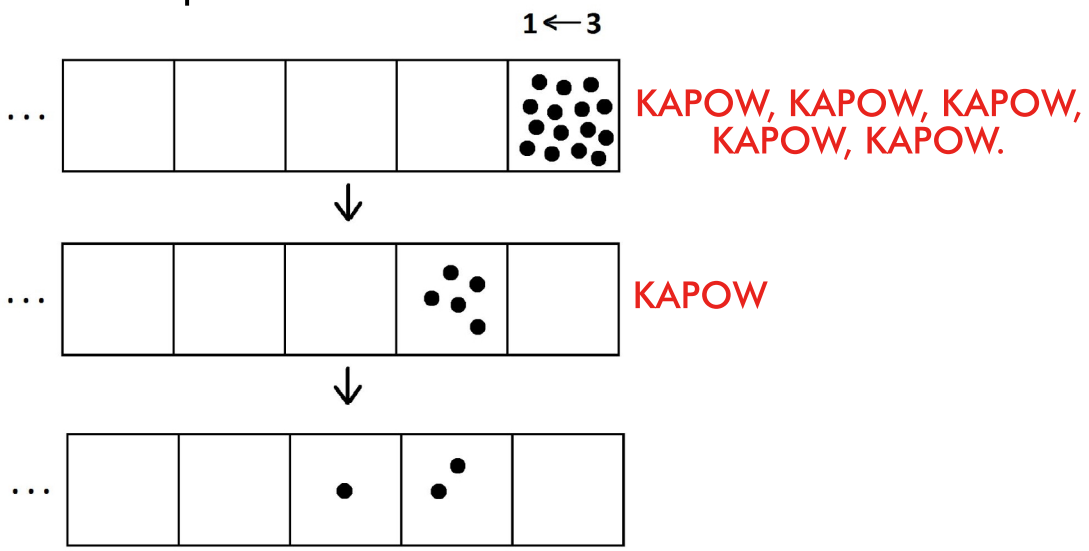
Een 2 ← 1 machine staat voor urenlang plezier beleven! Na een tijdje spelen met stippen en de bijbehorende codes kreeg James ineens een verbazingswekkend inzicht en bedacht nog meer machines.

* De antwoorden vind je op de laatste twee pagina's van dit 1e hoofdstuk (pagina's 10 + 11).

MEER MACHINES

James bedacht dat als je kunt spelen met een 1 ← 2 machine, dat dezelfde constructie dan misschien ook wel lukt in de vorm van een 1 ← 3 machine. En ja hoor, dat kan!

Telkens als er drie stippen in een vierkantje staan, dan exploderen en verdwijnen ze (KAPOW), om vervolgens in de vorm van één stip te verschijnen in het vierkantje links van het vierkantje waaruit de drie stippen verdwenen zijn.



Hierboven zie je wat er gebeurd met vijftien stippen in een 1 ← 3 machine. In het 1e vierkantje (het meest rechtse) vinden vijf explosies plaats. Met elke explosie verschijnt er een stip in het 2e vierkantje (één vierkantje naar links). In het 2e vierkant verschijnen in totaal vijf stippen. Dus ook hier vindt weer een explosie plaats (KAPOW). Er blijven twee stippen in dit vierkantje over en er verschijnt één stip in het 3e vierkantje.

Uitdagende vragen om te beantwoorden:

4. a) Laat zien dat de 1 ← 3 machinecode voor vier stippen 11 is.
   b) Laat zien dat de 1 ← 3 machinecode voor dertien stippen 111 is.
   c) Laat zien dat de 1 ← 3 machinecode voor twintig stippen 202 is.

5. Kan een x aantal stippen gelijk staan aan machinecode 2041 in een 1 ← 3 machine? Er vanuit gaande dat je drie stippen alijd laat exploderen.

6. Hoeveel stippen staan gelijk aan code 1022 in een 1 ← 3 machine?

7. Hoe denk je dat een 1 ← 4 machine werkt?
   Wat is de 1 ← 4 machinecode voor dertien stippen?

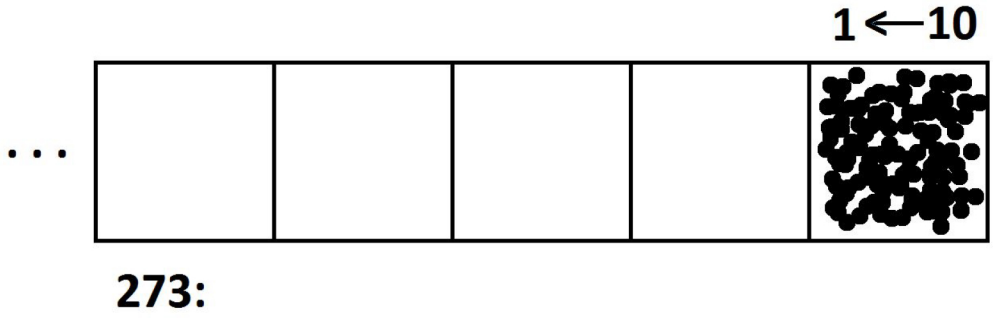
8. Wat is de 1 ← 5 machinecode voor dertien stippen?

9. Wat is de 1 ← 9 machinecode voor dertien stippen?

10. Wat is de 1 ← 5 machinecode voor twaalf stippen?

11. Wat is de 1 ← 9 machinecode voor twaalf stippen?

Oké. Nu wordt het lastiger! We gaan werken met een 1 ← 10 machine.
Plaats 273 stippen in de 1 ← 10 machine. Welke code komt eruit?

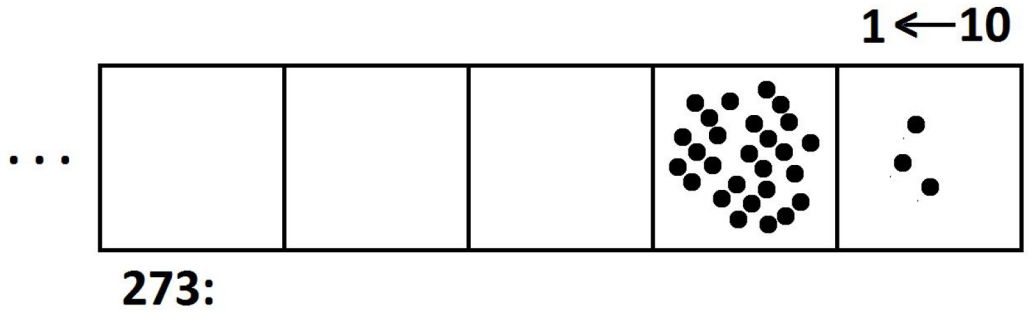


Stel jezelf de volgende vragen om tot een correct antwoord te komen:

Vinden er explosies plaats in het 1e, meest rechtse, vierkantje?
Jaker!

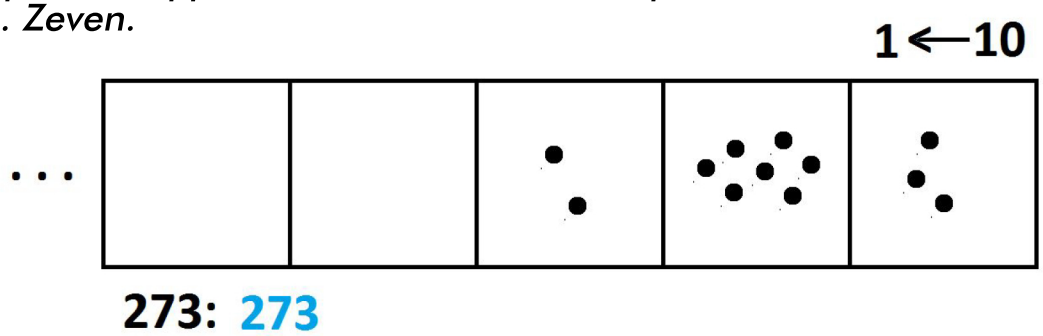
Hoeveel explosies vinden er in totaal plaats?
273 : 10 = 27,3. Het antwoord is dus 27 explosies.

Blijven er stipppen over in het 1e, meest rechtse, vierkantje?
Ja. Drie.



Vinden er explosies plaats in het 2e vierkantje?
Ja. Twee.

Blijven er stippen over in het 2e vierkantje?
Ja. Zeven.



De 1 ← 10 machinecode voor tweehonderddrieënzeventig is... 273!
Reken maar uit.

Uitdagende vragen om te beantwoorden:

12. a) Wat is de 1 ← 10 machinecode voor dertien stippen?

    b) Wat is de 1 ← 10 machinecode voor zevenendertig stippen?

    c) Wat is de 1 ← 10 machinecode voor vijfduizend achthonderd zesenveertig (5846) stippen?

Er is iets merkwaardigs aan de hand! Enig idee wat?
Welke vraag komt er nu bij je op?

AVONTUURLIJKE VERKENNINGEN

In de volgende hoofdstukken over exploding dots zullen de antwoorden op onderstaande vragen duidelijk worden, maar welicht vind je het leuk om nu alvast aan het denkten te worden gezet.

VERKENNING 1: WAT DOEN DEZE MACHINES?

Kun jij achterhalen welke functie deze machines hebben?

Waarom is de code 273 voor zowel honderd als drieënzeventig in een 1 ← 10 machine?

Zijn alle codes voor de aantallen identiek aan hoe we gewoonlijk cijfers noteren?

Als je deze vragen kunt beantwoorden, begrijp je dan ook alle codes die horen bij een 1 ← 2 machine? Wat betekend de code 1101, horend bij dertien stippen?

De antwoorden kun je vinden in 'Insighto'
(hoofdstuk twee over exploderende stippen).

VERKENNING 2: MAAKT HET UIT IN WELKE VOLGORDE STIPPEN EXPLODEREN?

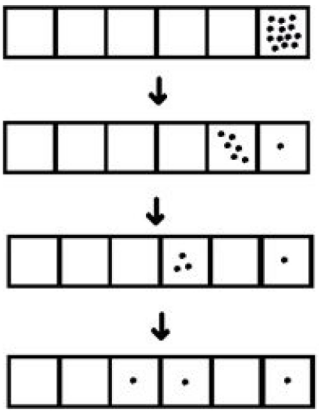
Plaats negentien stippen in het meest rechtse vierkantje van een 1 ← 2 machine. Laat de stippen in tweetallen exploderen. Op welke volgorde je dit doet maakt niet uit. Je hoeft niet eerst het 1e, meest rechtse, vierkantje helemaal aan bod te laten komen. Je mag tussendoor ook gerust explosies maken in het 2e vierkant en dus nieuwe stippen tevoorschijn laten komen in het 3e vierkantje.

Resulteren de explosies, op willekeurige volgordes, altijd in machinecode 10011?

ANTWOORDEN

Dit zijn de antwoorden op alle gestelde vragen uit dit hoofdstuk.

1. a) Dit schema geeft weer hoe je tot de machinecode 1101 komt, bij dertien stippen in een 1 ← 2 machine:



   b) Vijftig stippen in een 1 ← 2 machine staat gelijk aan code 110010.

2. Ervan uitgaande dat we altijd kiezen voor explosies als deze mogelijk zijn, kunnen we concluderen dat code 100211 in een 1 ← 2 machine niet klopt. Want er kan nog steeds één explosie plaatsvinden, waardoor de code uitkomt op 101011.

3. Dit is de code voor negentien stippen in een 1 ← 2 machine.

4. a+b+c) Bereken de codes door de stippen te tekenen in een 1 ← 3 machine scherma met voldoende vierkantjes.

5. Ervan uitgaande dat we altijd kiezen voor explosies als deze mogelijk zijn, kunnen we concluderen dat code 2041 in een 1 ← 3 machine niet klopt. Want er kan nog steeds één explosie plaatsvinden, waardoor de code uitkomt op 2111.

6. Vijfendertig stippen staan gelijk aan code 1022 in een 1 ← 3 machine.

7. De 1 ← 4 machinecode voor dertien stippen = 31.

8. De 1 ← 5 machinecode voor dertien stippen = 23.

9. De 1 ← 9 machinecode voor dertien stippen = 14.

10. De 1 ← 5 machinecode voor twaalf stippen = 22.
11. De 1 ← 9 machinecode voor twaalf stippen = 22. Dit is dezelfde code als antwoord op vraag 10, maar het betreft een andere machine!
12. a) De 1 ← 10 machinecode voor dertien stippen = 13.

    a) De 1 ← 10 machinecode voor zevenendertig stippen = 37.

    c) De 1 ← 10 machinecode voor vijfduizend achthonderd zesenveertig (5846) stippen = 5846.

    Dit zijn de codes van nummers zals we ze gewoonlijk ook schrijven!