Wybuchające Kropki™

MATERIAŁY

Ćwiczenie 6:

Wszystkie podstawy na raz - wielomiany

Tłumaczenie: Marta Kabut, www.edukacjaprzyszlosci.pl

Wybuchające Kropki
Ćwiczenie 6: All Bases, All at once - Polynomials

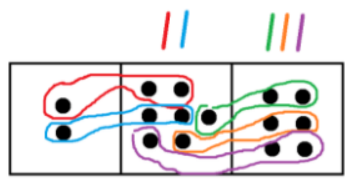
Filmy ze wszystkimi lekcjami o *Wybuchających Kropkach* na: http://gdaymath.com/courses/exploding-dots/

Materiał A: *Dzielenie przy dowolnej podstawie*

Obliczenia dla $276 \div 12$ i$(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$ są identyczne!

W maszynie 1←10.

$276 \div 12$
$= 23$



W maszynie 1←x.

$(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$
$= 2x + 3$

TAKI SAM OBRAZEK!

Oto kilka pytań do przećwiczenia tej koncepcji:

1. a) Oblicz $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$.
   b) Oblicz $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1)$**.**
   Jeśli powiem ci, że x to właściwie 10 w obu tych zadaniach, to jakie zadania w zwykłej arytmetyce będziesz liczyć?
2. Oto zadanie z dzielenia wielomianów w zapisie ułamkowym. Umiesz je zrobić? (Musisz uważać na coś trudnego?)
$$\frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^2 + 3}$$
3. Pokaż, że$(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \div (x + 1)$ równa się$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
   a) Co nam mówi to zadanie dla $x = 10$?
   b) Co nam mówi to zadanie dla $x = 2$?
   c) Co nam mówi to zadanie dla x równego po kolei 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 11?
   d) Co nam mówi to zadanie dla$x = 0$?
   e) A co nam mówi to zadanie dla $x = -1$?

Rozwiązania do materiału A

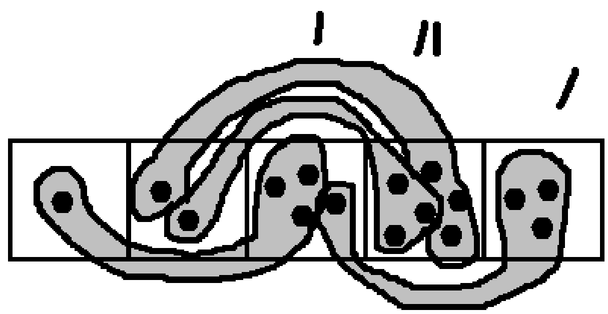
1.

a)$(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 1$

b) $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 3$

A jeśli x rzeczywiście równa się 10, to właśnie obliczyliśmy 23541 ÷ 21 = 1121 i 13653 ÷ 111 = 123.

2. Możemy to zrobić. Odpowiedź to $x^2 + 2x + 1$.



3.

a) Dla $x = 10$mamy 14641 ÷ 11 = 1331

b) Dla $x = 2$ mamy 81 ÷ 3 = 27

c) Dla $x = 3$ mamy 256 ÷ 4 = 64
Dla $x = 4$ mamy 625 ÷ 5 = 125
Dla $x = 5$mamy 1296 ÷ 6 = 216
Dla $x = 6$ mamy 2401 ÷ 7 = 343
Dla $x = 7$ mamy 4096 ÷ 8 = 512
Dla $x = 8$ mamy 6561 ÷ 9 = 729
Dla $x = 9$ mamy 10000 ÷ 10 = 1000
Dla $x = 11$ mamy 20736 ÷ 12 =1728

d) Dla $x = 0$ mamy 1 ÷ 1 = 1.

e) Dla $x = -1$mamy 0 ÷ 0 = 0. Hmm! Wygląda nieciekawie! (Czy można mieć maszynę 1 ← 0?)

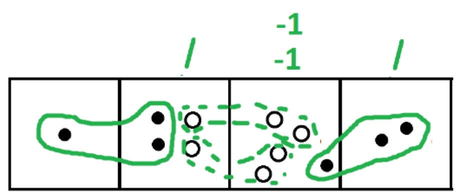
Wybuchające Kropki
Ćwiczenie 6: All Bases, All at once: Polynomials

Filmy ze wszystkimi lekcjami o *Wybuchających Kropkach* na: http://gdaymath.com/courses/exploding-dots/

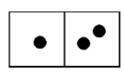
Materiał B: *Problem i rozwiązanie*

W dzieleniu wielomianów możemy też pracować z antykropkami.

x^3 - 3x + 2 =



x+2 =



A tutaj mamy kilka ćwiczeń, jeśli chcesz się sprawdzić.

1. Oblicz $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$.
2. Spróbuj tez $\frac{4x^3-14x^2+14x-3}{2x-3}$.
3. Jeśli możesz zrobić to zadanie, $\frac{4x^5-2x^4+7x^3-4x^2+6x-1}{x^2-x+1}$, to prawdopodobnie możesz zrobić każde zadanie!
4. A to, to już niezła zabawa: $\frac{x^{10}-1}{x^2-1}$.

Nawiasem: Czy istnieje jakieś sposób łatwego wykonywania podejścia pudełek i kropek na papierze? Zamiast rysowania pudełek i kropek, czy możemy rysować tabele z liczbami żeby śledzić współczynniki? (Słowo „syntetyczne" jest często używane dla algorytmów, które sobie tworzymy, żeby usunąć jeden czy dwa kroki z całego procesu.)

5. Czy umiesz wydedukować odpowiedź na$(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$ zanim właściwie zrobisz to zadanie?
6. Oblicz $\frac{x^4}{x^2-3}$.

7. Spróbuj jeszcze tego: $\frac{5x^5-2x^4+x^3-x^2+7}{x^3-4x+1}$.

   Jeśli robisz to ołówkiem na kartce, to pewnie będziesz w pewnym momencie próbować narysować 84 kropki. Nie łatwiej będzie po prostu zapisać liczbę „84"? W sumie, to nie prościej będzie zapisywać liczby zamiast rysować kropki?

Rozwiązania do materiału B

1. $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1} = x^2 - 2x + 1$.

2. $\frac{4x^3-14x^2+14x-3}{2x-3} = 2x^2 - 4x + 1$.

3. $\frac{4x^5-2x^4+7x^3-4x^2+6x-1}{x^2-x+1} = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1$.

4. $\frac{x^{10}-1}{x^2-1} = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$.

5. Wiemy, że $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$, więc założę się, że $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$ okaże się równać $2x + 3 + \frac{1}{x+2}$. Czy tak jest? Rozumiesz o co chodzi z resztą?

6. $\frac{x^4}{x^2-3} = x^2 + 3 + \frac{9}{x^2-3}$.

7. $5x^2 - 2x + 21 + \frac{-14x^2+82x-14}{x^3-4x+1}$.

Wybuchające Kropki
Ćwiczenie 6: All Bases, All at once - Polynomials

Filmy ze wszystkimi lekcjami o *Wybuchających Kropkach* na: http://gdaymath.com/courses/exploding-dots/

Materiał C: *SWOBODNE POSZUKIWANIA*

Mamy tutaj kilka ciekawych pytań, które możesz chcieć zbadać, lub po prostu nad nimi pomyśleć. Miłej zabawy!

POSZUKIWANIE 1: CZY UMIEMY WYJAŚNIĆ ARYTMETYCZNĄ SZTUCZKĘ?

Oto niezwykły sposób dzielenia przez dziewięć.

Żeby obliczyć 21203 ÷ 9, weź cyfry z liczby "21203" od lewej do prawej i obliczaj sumy częściowe po drodze, w taki sposób jak poniżej

$$\begin{array}{ll} 2 & = 2 \\ 2+1 & = 3 \\ 2+1+2 & = 5 \\ 2+1+2+0 & = 5 \\ 2+1+2+0+3 & = 8 \end{array}$$

a następnie odczytaj odpowiedź

.

W ten sam sposób

i

Umiesz wyjaśnić, w jaki sposób działa ta sztuczka?

Oto podejście, jakim można to było zrozumieć: Dla pierwszego przykładu, narysuj obrazek 21203 w maszynie $1 \leftarrow 10$, ale uznaj, że dziewiątka to po prostu $10-1$. Czyli na obrazku szukamy kopii takiego układu $\boxed{\bullet \mid \circ}$.

POSZUKIWANIE 2: CZY UMIEMY WYJAŚNIĆ TEORIĘ LICZB?

Użyj maszyny $1 \leftarrow x$ do obliczenia każdego z następujących przykładów

a) $\frac{x^2-1}{x-1}$ b) $\frac{x^3-1}{x-1}$ c) $\frac{x^6-1}{x-1}$ d) $\frac{x^{10}-1}{x-1}$

Czy widzisz, że $\dfrac{x^{liczba}-1}{x-1}$ zawsze będzie miało ładny wynik, bez żadnej reszty?

Można to inaczej zapisać w takiej postaci

$$x^{liczba} - 1 = (x-1) \times (cokolwiek)$$

.

Z przykładu c) możesz zobaczyć, że $x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. To oznacza, że możemy na przykład powiedzieć, że $17^6 - 1$ na pewno jest wielokrotnością 16! Dlaczego? Po prostu wybierz $x = 17$ w tym wzorze, a dostaniesz

$$17^6 - 1 = (17-1) \times (cokolwiek) = 16 \times (cokolwiek)$$

.

a) Wyjaśnij, dlaczego $999^{100} - 1$ musi być wielokrotnością 998.
b) Czy umiesz wyjaśnić, dlaczego $2^{100} - 1$ musi być wielokrotnością 3, i wielokrotnością 15, i wielokrotnością 31 i wielokrotnością 1023? (Wskazówka: $2^{100} = (2^2)^{50} 4^{50}$, i tak dalej.)
c) Czy $x^{liczba} - 1$ zawsze będzie wielokrotnością $x+1$? A przynajmniej w niektórych przypadkach?
d) Liczba $2^{100} + 1$ nie jest liczbą pierwszą. Jest wielokrotnością 17. Umiesz to udowodnić?