ЕКСПЛОДИРАЩИ ТОЧКИ
ГЛАВА 6

ВСИЧКИ БРОЙНИ СИСТЕМИ НАВЕДНЪЖ

Първите глави на тази история ни разведоха през по-голямата част от математиката в началното училище. Нека сега се сблъскаме с гимназиална алгебра за напреднали. Еха!

Сега ще ви издам нещо: няма нищо повече за правене. Вече сме свършили всичката необходима работа.

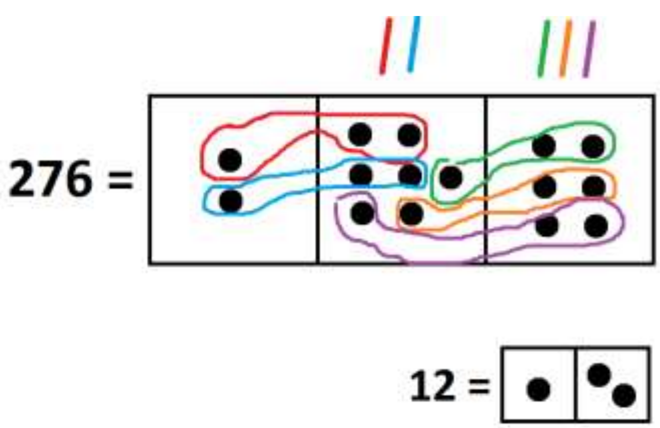
Единственото нещо, което трябва да осъзнаем е, че няма нищо специално в $1 \leftarrow 10$ машината. Можехме да правим всичката тази аритметика в една $1 \leftarrow 2$ машина ако искахме, или в една $1 \leftarrow 5$ машина, или дори в една $1 \leftarrow 37$ машина. На математиката ѝ е все едно коя машина ще използваме. Единствената причина да използваме $1 \leftarrow 10$ машината е че сме хора, а хората имат предрасъдък към числото десет.

Нека преговорим всичко, което сме направили досега. Но сега ще го направим във всички възможно машини, всичко това наведнъж!

Звучи невериятно. Но всъщност е изненадващо просто.

ДЕЛЕНИЕ В КОЯ ДА Е БРОЙНА СИСТЕМА

Да разгледаме отново задачата за деление $276 \div 12$, която по-рано решихме в една $1 \leftarrow 10$ машина. Виждаме отговора 23. Вгледайте се в картинката за момент – след малко тя пак ще се прокрадне при нас.



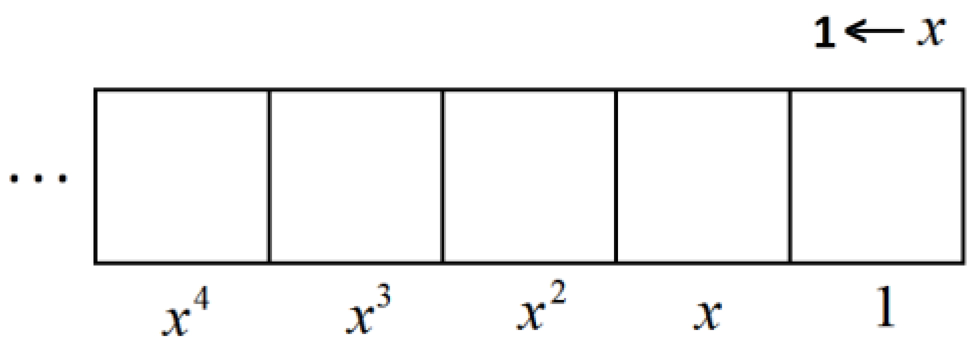
Нека сега решим същата задача за деление в друга бройна система. Но единствената хитра част е, че няма да ви кажа коя машина ще използваме! Може би отново използваме $1 \leftarrow 10$ машината, аз просто няма да ви кажа. Може би ще се окаже $1 \leftarrow 2$ машината, или защо не $1 \leftarrow 4$ машината, или $1 \leftarrow 13$ машината. Вие просто няма да знаете, защото няма да ви кажа. В такова настроение съм!

В гимназиалната алгебра обикновено се използва една много любима буква от латинската азбука, за да се изобрази едно количество, чиято стойност не знаем. Това е буквата x.

Така че нека работим с една $1 \leftarrow x$ машина, като буквата x ще илюстрира някое число, чиято стойност не знаем.

В една $1 \leftarrow 10$ машина, стойностите на кутиите са степените на числото десет: 1, 10, 100, 1000, … .
В една $1 \leftarrow 2$ машина, стойностите на кутиите са степените на числото две: 1, 2, 4, 8, 16, ….
И така нататък.

Следователно, в една $1 \leftarrow x$ машина, стойностите на кутите ще са степените на числото x.



За проверка, ако ви кажа, че x всъщност е 10 в моята глава, тогава степените 1, x, x^2, x^3, … съвпадат с числата 1, 10, 100, 1000, … , които са правилните стойности за $1 \leftarrow 10$ машината. Ако вместо това ви бях казал, че x е всъщност 2 в главата ми, тогава степените 1, x, x^2, x^3, … съвпадат с числата 1, 2, 4, 8, 16, …, които са правилните стойности за $1 \leftarrow 2$ машината.

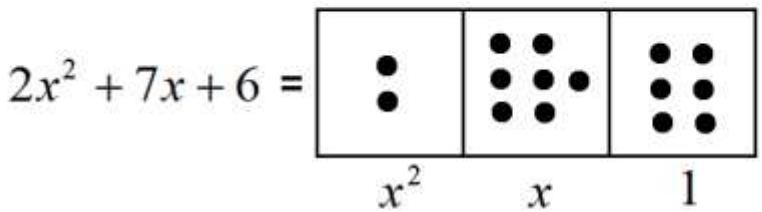
Значи тази $1 \leftarrow x$ машина всъщност отговаря за всички машини едновременно!

Супер. Изведнъж! Ето ви една задача за напреднали ученици в гимназията.

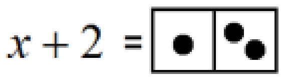
Compute $\left(2x^2+7x+6\right) \div (x+2)$.

Можете ли да разберете какво означава това в една $1 \leftarrow x$ машина? Опитайте се да си поиграете с това преди да продължите да четете по-нататък.

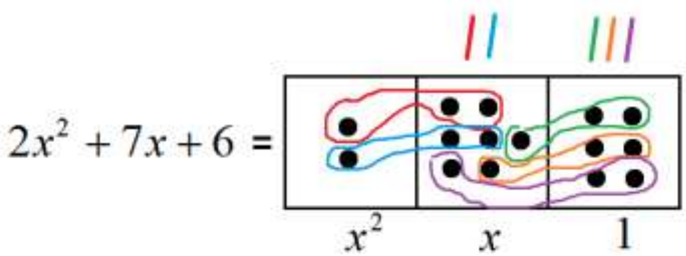
Ето как изглежда $2x^2 + 7x + 6$ в една $1 \leftarrow x$ машина. Има две x^2-и, седем x-ове и шест единици.

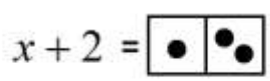


А ето как изглежда $x + 2$.



Задачата за деление $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$ ни пита колко копия на $x + 2$ можем да намерим в картинката на $2x^2 + 7x + 6$.

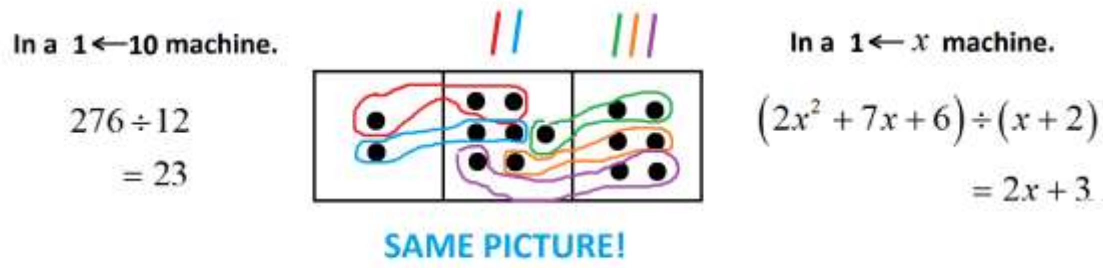




Аз виждам две копия на $x + 2$ на ниво x и три копия на ниво 1. Отговорът е $2x + 3$.

Stare at the picture for $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$.
Does it look familiar?

Ние току що решихме една задача по гимназиална алгебра, все едно беше задача по аритметика в началното училище!



Картинката е една и съща! Какво се случва?

Да предположим, че ви кажа, че x всъщност е било 10 в главата ми през цялото време. Тогава $2x^2+7x+6$ е числото $2\times100+7\times10+6$, което е 276. И $x+2$ е числото $10+2$, тоест, 12. И значи ние сметнахме $276\div12$. Получихме отговорът $2x+3$, който е равен на $2\times10+3=23$, ако наистина съм ви казал, че x е 10 .

В крайна сметка се оказа, че ние просто повторихме решението на задача по аритметика в началното училище!

Между другото: А ако ви бях казал, че x е било всъщност 2, тогава

$2x^2+7x+6=2\times4+7\times2+6$, което прави 28,
$x+2=2+2$, което и 4,

и

$2x+3=2\times2+3$, което е 7 .

Току що ние сметнахме $28\div4=7$, което е вярно!

Значи се оказа, че извършването на едно деление в една $1\leftarrow x$ машина е всъщност извършване на беркраен брой деления наведнъж. Уау!

Опитайте се да изчислите $\left(2x^3+5x^2+5x+6\right)\div\left(x+2\right)$ в една $1\leftarrow x$ машина и ще получите отговора $2x^2+x+3$. (И ако ви бях казал, че x е равно на 10 в главата ми, можете ли да видите как това съвпада с $2556\div12=213$?)

В гимназията, числа, изразени в една $1\leftarrow x$ машина, обикновено се наричат *полиноми* или *многочлени*. Те са числа, също както когато ги изразяваме в 10-ична бройна система, само че този път сме изразили тези “числа” в x-ична бройна система. (И ако някой ви каже, че x е всъщност 10, тогава те наистина са числа в 10-ична бройна система!)

Знаейки това, голяма част от алгебрата в гимназията става много лесна: тя е повторение на аритметиката в началното училище, която използва 10-ичната бройна система.

Ето няколко задачи за упражнение, които може да опитате да решите ако искате. Моите отговори на тези задачи ще намерите в края на главата.

1. a) Пресметнете $\left(2x^4+3x^3+5x^2+4x+1\right)\div(2x+1)$.

   b) Пресметнете $\left(x^4+3x^3+6x^2+5x+3\right)\div\left(x^2+x+1\right)$.

   Ако ви кажа, че x е всъщност 10 и в двете задачи, тогава кои две задачи по аритметика решихте току що?

2. Ето една задача за деление на полиноми, записана чрез дроби. Можете ли да я решите? (Има ли лека трудност, за която трябва да внимавате?)

$$\frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^2+3}$$

3. Покажете, че $\left(x^4+4x^3+6x^2+4x+1\right)\div(x+1)$ е равно на x^3+3x^2+3x+1.
   a) Какво ни казва това когато $x=10$?
   b) Какво ни казва това когато $x=2$?
   c) Какво ни казва това когато x е равно на всяко от 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 11?
   d) Какво ни казва това когато $x=0$?
   e) Какво ни казва това когато $x=-1$?

ЕДНА ЗАДАЧА

Супер. А сега след като сте уверени в уменията си по алгебра за напреднали, трябва да направя едно признание. През цялото време ви заблуждавах!

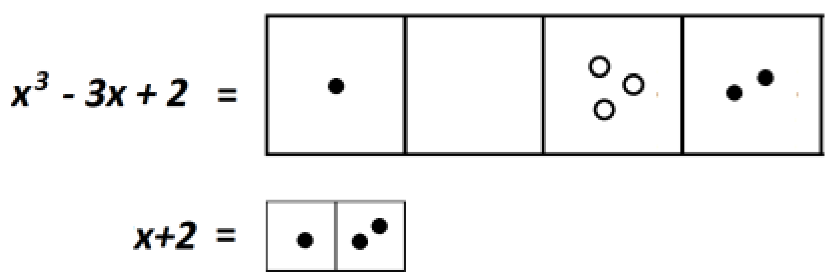
Досега избирах примери, които да се решават лесно и сметките да излизат чудесно. Истината е, че нашият страхотен метод не винаги работи толкова гладко.

Например, погледнете следната задача,

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}.$$

Забелязахте ли какво избягвах през цялото това време? Дам. Отрицателните числа.

Ето какво виждам аз в една $1 \leftarrow x$ машина.



Търсим една точка до две точки в картинката на $x^3 - 3x + 2$. И аз не виждам нито една такава група!

Ами сега? Какво да правим, освен да си поплачем малко? Имате ли идеи?

Изкушаващо би било да кажем, че просто трябва да отексплодираме няколко точки. Това е чудесна идея! Само че … ние нямаме представа каква е стойността на числото x и в такъв случай не знаем колко точки да нарисуваме след отексплозията. Хваща ме яд!

Нуждаем се от гениално прозрение за нещо хитро, което да направим. Или може би задачи за полиноми с отрицателни числа просто не могат да бъдат решени с метода на точките и кутиите.

Какво мислите? Прозрения?

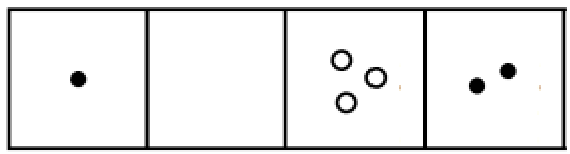
РАЗВРЪЗКАТА

Това е задачата за деление, която не можем да решим.

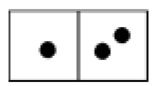
$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$$

А тук е картинката за нея онтово в една $1 \leftarrow x$ машина.

x^3 - $3x + 2$ =



$x+2$ =



Търсим копия на $x + 2$, една точка до две точки, някъде в картинката на $x^3 - 3x + 2$. Но не виждаме нито едно копие.

И също така не можем да отексплодираме никоя точка, защото не знаем каква е стойността на x. (Не нзаем колко точки да нарисуваме след отексплозията.)

Ситуацията към този момент изглежда безнадеждна.

Но аз ще ви дам един съвет, всъщност това е житейски урок. Ето го и него.

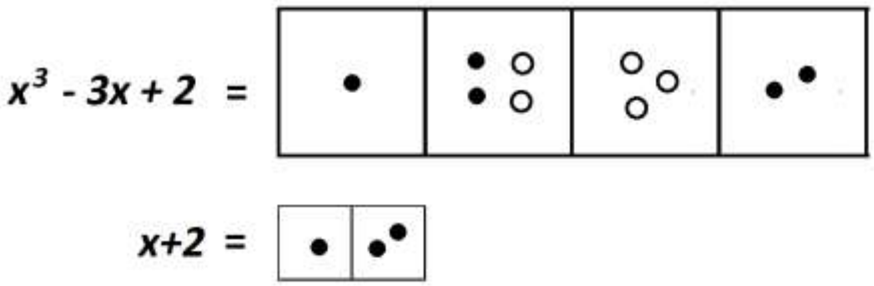
> **АКО В ЖИВОТА ИМА НЕЩО, КОЕТО ИСКАТЕ ДА СЕ СЛУЧИ, НАПРАВЕТЕ ГО!**
> **(И си понесете последствията.)**

В момента има ли нещо в живота, което искаме да се случи?

Погледнете тази самотна точка вляво. Не би ли било прекрасно да има две точки в кутията вдясно от нея, така че да можем да оградим едно копие на $x + 2$?

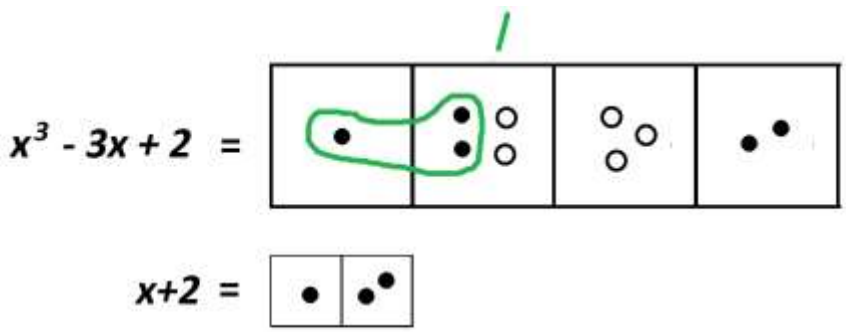
Ами тогава нека да сложим две точки в тази празна кутия! Това е нещото, което искаме да се случи, така че нека го направим!

Но има последствия: тази кутия би трябвало да е празна. И за да я остане тя такава, можем да сложим освен двете точки и две антиточки!



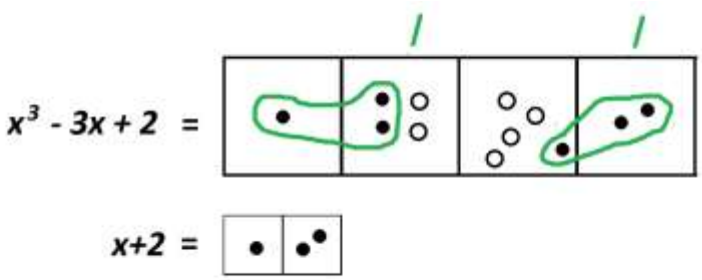
Гениално!

Сега вече имаме едно копие на това, което искаме.



Има ли нещо друго в живота, което бихте искали да се случи? Можете ли да създадете още едно копие на $x + 2$ някъде?

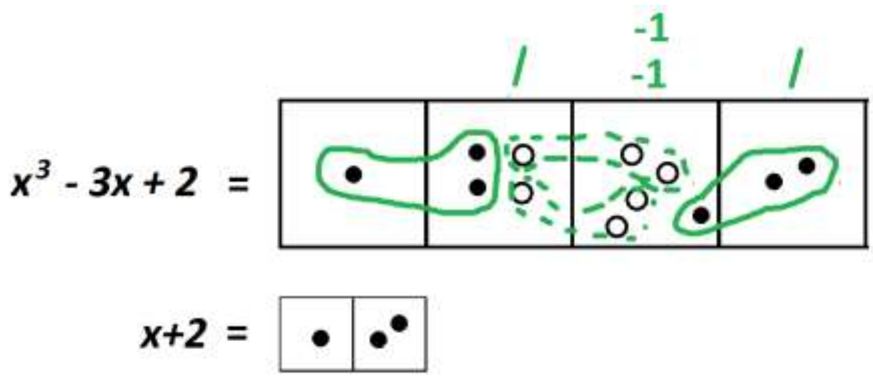
Аз лично бих желал да видя една точка вляво на двойката точки в най-дясната кутия. Затова ще го направя реалност! Ще сложа една точка и една антиточка. Сега вече мога да закръгля още едно копие на $x + 2$.



Това беше добре, но сега дали сме отново в капан? Може би тази брилиантна идея не се оказа полезна в края на краищата.

Вгледайте се в горната картинка за момент. Забелязвате ли нещо?

Ако се вгледате внимателно ще видите, че на нея има копия на противоположното нещо на това, което търсим! Вместо копия на една точка до две точки, там има копия на една антиточка до две антиточки.



Еха!

И в такъв случай как четем отговора? Виждаме, че $\left(x^3-3x+2\right)\div\left(x+2\right)$ е равно на x^2-2x+1.

Страхотно!

Така че всъщност излъгах като ви казах, че ви заблуждавах. Всъщност можем да решим всички задачи за деление на полиноми чрез нашия метод с точки и кутии, дори онези с отрицателни числа!

Ако търсите задачи за упражнение, опитайте следните. Опитайте ги с молив и хартия, а след това може би и с приложението. Отговорите, както обикновено, се намират в края на главата.

4. Пресметнете $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$.

5. Опитайте се да решите $\dfrac{4x^3-14x^2+14x-3}{2x-3}$.

6. Ако успеете да решите тази задача, $\dfrac{4x^5-2x^4+7x^3-4x^2+6x-1}{x^2-x+1}$, то значи можете да решите всяка една задача!

7. Тази е страшно забавна: $\dfrac{x^{10}-1}{x^2-1}$.

Между другото: Има ли лесен начин да прилагате метода с точките и кутиите на хартия? Вместо да рисувате кутии и точки, можете ли да работите с таблици от числа, като следите само коефициентите? (Думата *синтетичен* често се използва за алгоритми, които някой създава, за да премахне една или повече стъпки от истинския процес.)

ОСТАТЪЦИ

Също толкова лесно е да се разпознават остатъци в задачи за деление в x-ична бройна система, колкото е и в 10-ичната бройна система.

Поиграйте си с

$$\frac{4x^4-7x^3+9x^2-3x-1}{x^2-x+1}$$

в една $1 \leftarrow x$ машина. Можете ли да видите, че това е равно на $4x^2-3x+3$ с остатък $2x-3$, който чака да бъде разделен на x^2-x+1?

Хората обикновено записват отговора по следния начин:

$$\frac{4x^4-7x^3+9x^2-3x-1}{x^2-x+1}=4x^2-3x+2+\frac{2x-3}{x^2-x+1}.$$

Ето няколко задачи за упражнение, ако решите да си поиграете още малко с тази идея.

8. Можете ли да откриете какъв трябва да е отговора на задачата $\left(2x^2+7x+7\right)\div\left(x+2\right)$ преди да я решите?
9. Пресметнете $\frac{x^4}{x^2-3}$.
10. Опитайте тази луда задача: $\frac{5x^5-2x^4+x^3-x^2+7}{x^3-4x+1}$.

    Ако се опитате да я направите с лист и молив, ще установите, че ви се налага да нарисувате 84 точки в някой момент. Бързо и лесно ли изглежда просто да напишете числото “84”? Всъщност, как ви звучи идеята просто да записвате числата без да се занимавате да рисувате точките?

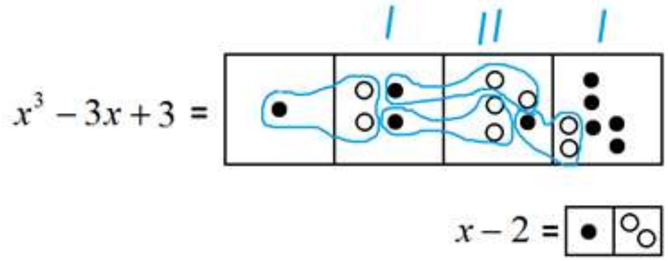
ПО ЖЕЛАНИЕ: ТЕОРЕМАТА ЗА ДЕЛЕНИЕ С ЧАСТНО И ОСТАТЪК

Учители в гимназията са ме питали дали подходът с точки и кутии може да се използва, за да се обясни “Теоремата за деление с частно и остатък.” Тази секция, която е по желание, е предназначена за всеки, който се интересува от това да научи математиката зад това късче полиномиална алгебра за супер-напреднали.

ВНИМАНИЕ: Следващият абзац не е за хора със слаби сърца!

Нека разгледаме $\frac{x^3-3x+3}{x-2}$. Това е полиномът $p(x)=x^3-3x+3$ разделен на простият (линеен) полином $x-2$.

Ето какво получавам аз в $1 \leftarrow x$ машината. (Трябваше да прибавя няколко двойки от точка-антиточка.) Погледнете!



Виждаме, че $\frac{x^3-3x+3}{x-2}=x^2+2x+1+\frac{5}{x-2}$. Остатъкът е 5.

Но нека се вгледаме внимателно в картинката на x^3-3x+3, като си отбелязваме кръгчетата.

Виждаме едно кръгче на ниво x^2, две на ниво x и едно на ниво едно. Освен това виждаме остатък 5. Понеже всяко кръгче представлява количеството $x-2$, то това означава, че

$$p(x)=x^3-3x+3=(x-2)\times x^2+2(x-2)\times x+(x-2)\times 1+5.$$

(Това означава едно копие на $x-2$ на ниво x^2, две копия на ниво x, едно копие на ниво единици и още 5.)

Това показва, че $p(x)$ е комбинация от няколко копия на $(x-2)$ плюс една допълнителна 5-ца.

$$p(x) = \text{ multiples of } (x-2) \quad +5.$$

Това “$+5$” стърчи като възпален палец. Ако заместим $x = 2$ получаваме

$$P(2) = \text{ multiples of } 0 \quad +5 = 0+5 = 5.$$

Най-общо, делението на полином $p(x)$ на полином във формата $x-h$ ни дава

$$p(x) = \text{ multiples of } (x-h) \quad +r$$

където r е остатък. Замествайки $x = h$ получаваме $p(h) = r$.

Това е теоремата за деление с частно и остатък за полиноми.

> *Ако разделим полинома $p(x)$ на полинома $x-h$, получаваме остатък, който е едно число равно на $p(h)$, което е стойността на полинома когато $x = h$.*

Хората харесват тази теорема, защото тя показва, че ако $p(h) = 0$ за някое число h, то тогава $p(x)$ е кратно на $x-h$. (Остатъкът е нула.) Оттук следва теоремата за разлагане на полиноми.

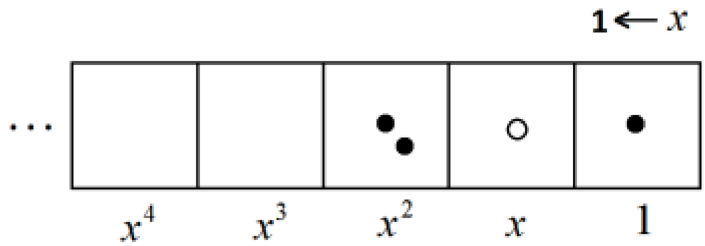
> *Един полином p има делител $x-h$ точно когато h е нула на полинома, тоест, точно когато $p(h) = 0$.*

Това е нещо супер важно за хората, които се интересуват от разлагания.

УМНОЖЕНИЕ НА ПОЛИНОМИ

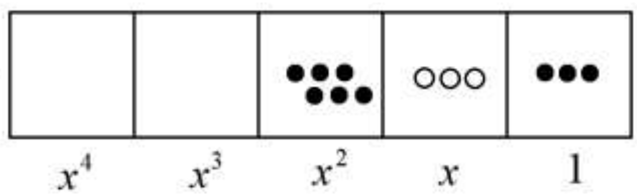
Можем ли да умножаваме полиноми? На бас, че да!

Ето полинома $2x^2 - x + 1$.



Ако исаме да го умножим по 3, то просто трябва да заменим всяка точка и всяка антиточка с три копия на себе си. (С други думи, искаме да утроим всички количества, което видим.)

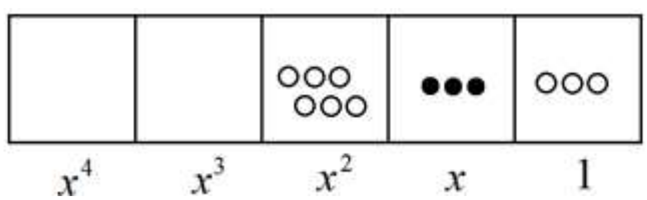
$3(2x^2 - x + 1) =$



Ние буквално виждаме, че $3(2x^2 - x + 1)$ е равно на $6x^2 - 3x + 3$.

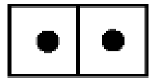
Да речем, че вместо това искаме да умножим $2x^2 - x + 1$ по -3. Това означава, че искаме анти-версията на утрояването на всички количества, които виждаме. Значи всяка точка в картинката на $2x^2 - x + 1$ трябва да заменим с три антиточки и всяка антиточка с три точки.

$-3(2x^2 - x + 1) =$



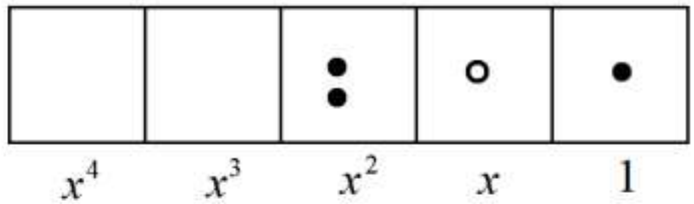
Имаме, че $-3(2x^2 - x + 1) = -6x^2 + 3x - 3$. Освен това можем да кажем, че $-3(2x^2 - x + 1)$ е анти-версията на $3(2x^2 - x + 1)$.

А сега да речем, че искаме да умножим $2x^2 - x + 1$ по $x + 1$. Понеже $x + 1$ изглежда като

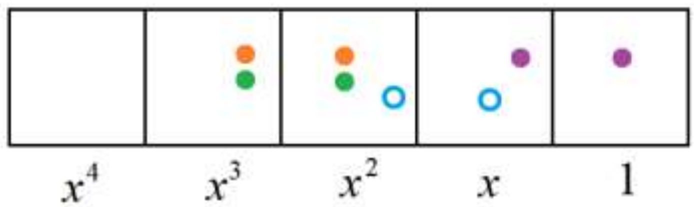


то ние трябва да заменим всяка точка в картинката на $2x^2 - x + 1$ с една точка и една точка до нея, както и всяка антиточка с антиверсията на това, тоест с една антиточка и една антиточка до нея. (Това започва да става забавно!)

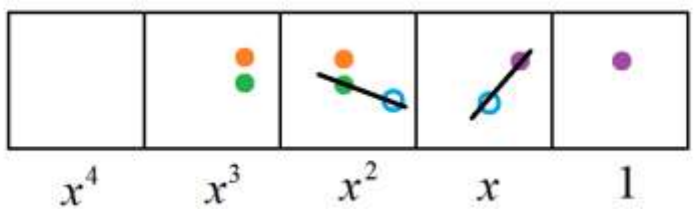
$2x^2 - x + 1 =$



$(x+1)\times(2x^2 - x + 1) =$

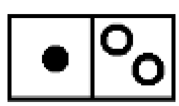


$=$



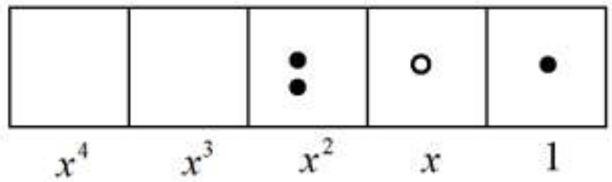
След няколко взаимни унищожения, получаваме, че $(x+1)\times(2x^2 - x + 1)$ е равно на $2x^3 + x^2 + 1$
.

А сега нека умножим $2x^2 - x + 1$ по $x - 2$, което изглежда по следния начин.

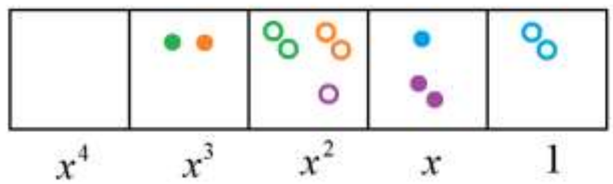


Всяка точка трябва да заменим с една точка и две антиточки до нея, а всяка антиточка - с обратното на това.

$2x^2 - x + 1 =$

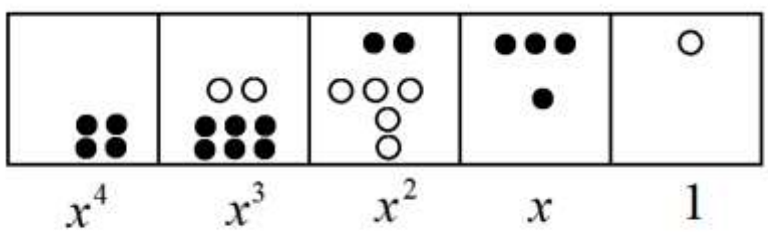


$(x-2)\times(2x^2 - x + 1) =$



Виждаме, че $(x-2)(2x^2 - x + 1) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.

Супер, а сега е ваш ред. Опитайте се да решите $2x^2 - x + 1$ по $2x^2 + 3x - 1$. Тази картинка ли получавате? (Този път не съм оцветил точките!) Виждате ли отговора $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4x - 1$?



СЪБИРАНЕ И ИЗВАЖДАНЕ НА ПОЛИНОМИ

Събирането и изваждането в x-ична бройна система не се различават от събирането и изваждането в 10-ична бройна система. Всъщност са даже по-лесни! След като не знаем стойността на x, никога няма да ни се наложи да експлодираме точки. Тоест, ние никога не сме задължени да извършваме “преноси”, както правим в аритметиката в 10-ична бройна система!

$$\begin{array}{rl} & 2x^2 + 8x - 5 \\ + & 9x^2 + 7x + 6 \\ \hline = & 11x^2 + 15x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 10x^3 + 5x^2 - 7x + 3 \\ - & 3x^3 + 8x^2 + 5x - 2 \\ \hline = & 7x^3 - 3x^2 - 12x + 5 \end{array}$$

Ако си поискаме, можем да си нарисуваме картинките с точки и кутии в една $1 \leftarrow x$ машина.

ЗА ЩУРИ ИЗСЛЕДОВАТЕЛИ

Ето няколко “големи въпроса” за изследване, с които може да решите да се захванете, или поне да помислите по тях. Приятно забавление!

ОБЕКТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ 1: МОЖЕМ ЛИ ДА СИ ОБЯСНИМ ТОЗИ АРИТМЕТИЧЕН ТРИК?

Сега ще ви покажа един странен начин да делим на девет.

За да сметнем $21203 \div 9$, да кажем, прочитаме “21203” от ляво надясно, пресмятайки частичните суми от цифрите докато се движим

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{2} & \mathbf{=2} \\
\mathbf{2+1} & \mathbf{=3} \\
\mathbf{2+1+2} & \mathbf{=5} \\
\mathbf{2+1+2+0} & \mathbf{=5} \\
\mathbf{2+1+2+0+3} & \mathbf{=8}
\end{array}$$

и след това прочитаме отговора така

$$21203 \div 9 = 2355\ R\ 8.$$

Аналогично,

$$1033 \div 9 = 1 |\ 1+0\ | 1+0+3 | \quad R \quad 1+0+3+3 \quad = 114\ R\ 7$$

и

$$2222 \div 9 = 246\ R\ 8.$$

Можете ли да обясните защо този трик работи?

Ето как аз бих подходил: За първия пример, нарисувайте картинка на 21203 в една $1 \leftarrow 10$ машина, но си мислете за девет като за $10-1$. Тоест, търсете копия на $\boxed{\bullet \mid \circ}$ в картинката.

ОБЕКТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ 2: МОЖЕМ ЛИ ДА ИЗСЛЕДВАМЕ ТЕОРИЯТА НА ЧИСЛАТА?

Използвайте една $1 \leftarrow x$ машина, за да пресметнете всеки от следните изрази

a) $\frac{x^2-1}{x-1}$ b) $\frac{x^3-1}{x-1}$ c) $\frac{x^6-1}{x-1}$ d) $\frac{x^{10}-1}{x-1}$

Сега можете ли да видите, че $\frac{x^{\text{number}}-1}{x-1}$ винаги ще дава хубав отговор без остатък?

Друг начин да кажем същото нещо е следния

$$x^{\text{number}}-1=(x-1)\times(\text{something}).$$

Например, от подточка c) можете да забележите, че $x^6-1=(x-1)\left(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)$. Това означава например, че 17^6-1 със сигурност се дели на 16! Е как така? Просто заместете $x=17$ в горната формула и ще получите

$$17^6-1=(17-1)\times(\text{something})=16\times(\text{something}).$$

a) Обяснете защо $999^{100}-1$ трябва да се дели на 998.

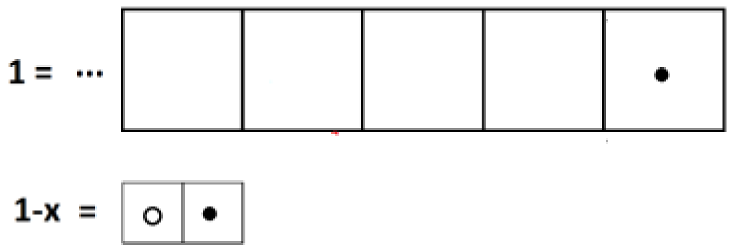
b) Можете ли да обясните защо $2^{100}-1$ трябва да се дели на 3, на 15, на 31 и на 1023? (Подсказка: $2^{100}=\left(2^2\right)^{50}=4^{50}$ и т.н.)

c) Дали $x^{\text{number}}-1$ винаги се дели на $x+1$? Поне понякога?

d) Числото $2^{100}+1$ не е просто. То се дели на 17. Можете ли да видите как се доказва това?

ОБЕКТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ 3: БЕЗКРАЕН ОТГОВОР?

Ето една картинка на елементарния полином $\mathbf{1}$ и на полинома $1-x$.



Можете ли да пресметнете $\frac{1}{1-x}$? Можете ли да интерпретирате отговора?

(Ние ще изследваме този пример в следващата глава.)

РЕШЕНИЯ

Както ви обещах, тук са решенията на въпросите от преди малко.

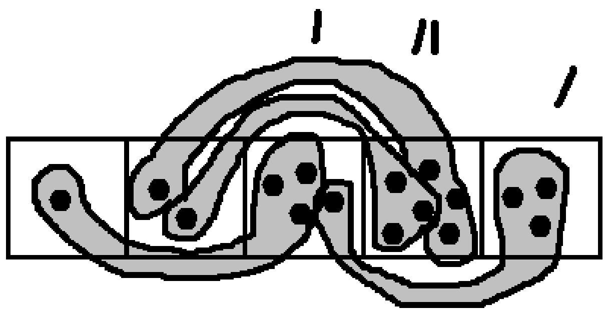
1.

a) $\left(2x^4+3x^3+5x^2+4x+1\right)\div\left(2x+1\right)=x^3+x^2+2x+1$

b) $\left(x^4+3x^3+6x^2+5x+3\right)\div\left(x^2+x+1\right)=x^2+2x+3$

И ако x се окаже, че е 10, то ние току що сметнахме $23541\div 21=1121$ и $13653\div 111=123$.

2. Можем да я решим. Отговорът е x^2+2x+1.



3.

a) За $x=10$ то ни казва, че $14641\div 11=1331$

b) За $x=2$ то ни казва, че $81\div 3=27$

c) За $x=3$ то ни казва, че $256\div 4=64$
За $x=4$ то ни казва, че $625\div 5=125$
За $x=5$ то ни казва, че $1296\div 6=216$
За $x=6$ то ни казва, че $2401\div 7=343$
За $x=7$ то ни казва, че $4096\div 8=512$
За $x=8$ то ни казва, че $6561\div 9=729$
За $x=9$ то ни казва, че $10000\div 10=1000$
За $x=11$ то ни казва, че $20736\div 12=1728$

d) За $x=0$ то ни казва, че $1\div 1=1$.

е) За $x=-1$ то ни казва, че $0\div 0=0$. Хмм! Това изглежда съмнително! (Можем ли да имаме 1←0 машина?)

4. $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}=x^2-x+1$.

5. $\dfrac{4x^3-14x^2+14x-3}{2x-3}=2x^2-4x+1$.

6. $\dfrac{4x^5-2x^4+7x^3-4x^2+6x-1}{x^2-x+1}=4x^3+2x^2+5x-1$.

7. $\dfrac{x^{10}-1}{x^2-1}=x^8+x^6+x^4+x^2+1$.

8. Ние знаем, че $\left(2x^2+7x+6\right)\div(x+2)=2x+3$, така че се обзалагам, че $\left(2x^2+7x+7\right)\div(x+2)$ ще се окаже, че е равно на $2x+3+\dfrac{1}{x+2}$. Прав ли съм?

9. $\dfrac{x^4}{x^2-3}=x^2+3+\dfrac{9}{x^2-3}$.

10. $5x^2-2x+21+\dfrac{-14x^2+82x-14}{x^3-4x+1}$.