



Uplifting Mathematics for All

PUNTOS EXPLOSIVOS CAPITULO 5

DIVISION

Adición, sustracción, multiplicación. Ahora le toca a la división.

He aquí un ejemplo de un problema de división: *Computa $276 \div 12$.*

Y aquí una manera terrible de resolverlo: *Haz un dibujo con 276 puntos en una página y agrúpalos dentro de círculos de doce puntos cada uno. Después de como una hora, veras que caben 23 grupos de doce en 276.*

He aquí una forma buenísima de resolverlo: *¡Haz un dibujo de 276 puntos en una máquina $1 \leftarrow 10$ y enseguida verás que en él hay 23 grupos de doce!*

¡Sigue leyendo y jugando para que veas cómo podemos hacerlo!

Dato Curioso: ¿Sabías que al símbolo de división \div se le llama *óbelo*?

Para Comenzar

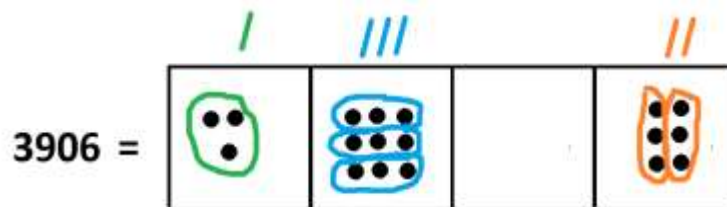
Empecemos lentamente con un problema de división cuya respuesta se pudiera ver inmediatamente.

¿Qué da $3906 \div 3$?

La respuesta es 1302.

Si pensamos en 3906 como $3000 + 900 + 6$, entonces podemos ver que dividir entre tres da $1000 + 300 + 2$.

Y realmente lo podemos ver si hacemos un dibujo de 3906 en una máquina $1 \leftarrow 10$. Vemos grupos de tres: 1 grupo en el nivel de miles, 3 grupos en el nivel de centenas, y 2 grupos en el nivel de las unidades.



¡Eso es! ¡Estamos haciendo divisiones y viendo las respuestas aparecer ahí mismo!

Trata de hacer $402 \div 3$ sólo con un dibujo de puntos y casillas. Ves como las des-explusiones descubren la incógnita y revelan la respuesta 134?

Y si quieres pensar profundamente sobre lo que realmente esta pasando en este dibujo (¿de verdad es tan simple?) salta a la sección del capítulo sobre “Exploraciones Profundas”.

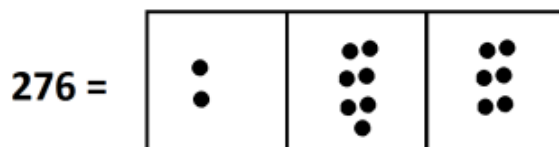
Pero si te sientes listo para continuar ahora mismo... entonces ¡sigamos!

División Larga

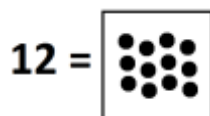
Todo bien con la división de números de un solo dígito. ¿Qué hay de la división de números con multiples dígitos? La gente suele llamarla *división larga*.

Consideremos el problema $276 \div 12$.

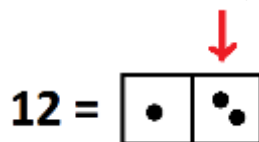
He aquí un dibujo en máquina $1 \leftarrow 10$ de 276.



Y en este dibujo de 276 estamos buscando grupos de doce. Aquí está un doce.

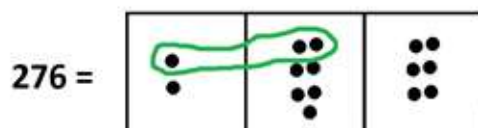


En realidad, esto es incorrecto ya que en nuestra máquina $1 \leftarrow 10$ habría ocurrido una explosión. Doce aparecería como un punto al lado de dos puntos. (Pero debemos siempre recordar que este es un dibujo donde todos los puntos residen en la casilla más a la derecha.)

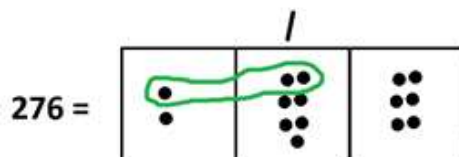


Bueno. Entonces estamos buscando grupos de 12 en nuestro dibujo de 276. ¿Vemos en nuestro diagrama algún “punto-junto-a-dos-puntos”?

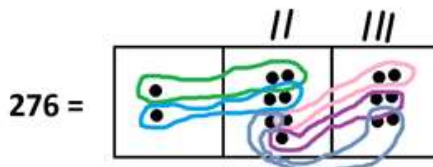
Si. Aquí está uno.



Dentro de cada lazo de 12 encontramos que 12 puntos residen en el lado derecho del lazo. Entonces hemos encontrado un grupo de 12 a nivel de la decenas.



Y hay más grupos de doce.



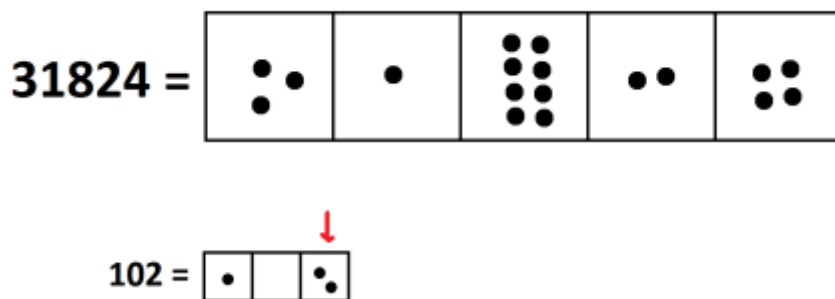
Vemos un total de dos grupos de 12 a nivel de las decenas y tres grupos de 12 a nivel de las unidades. Por lo tanto la respuesta a $276 \div 12$ es 23.

He aquí algunas preguntas para practicar que quizás quieras o no intentar. Mis respuestas a ellas aparecen al final de este capítulo.

1. Calcula a mano con el método de puntos-y-casillas $2783 \div 23$.
2. Calcula $3900 \div 12$.

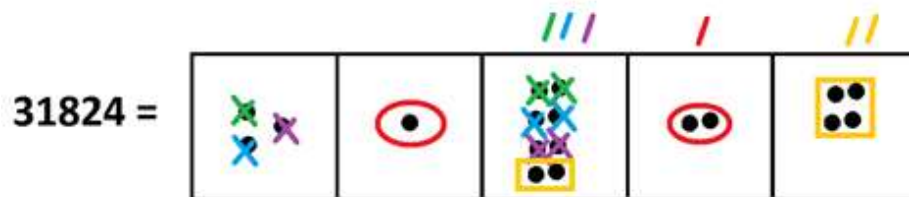
Veamos otro ejemplo. Calculemos $31824 \div 102$.

Aquí está el dibujo.



Ahora estamos buscando grupos de un punto-no punto-dos puntos en nuestro dibujo de 31824. (Y recuerda, todos los 102 puntos de cada grupo que identificamos pertenecen a la casilla hacia la derecha.)

Podemos ver varios grupos. (Me parece confuso usar lazos así que ahora uso X y círculos y casillas. ¿Te parece bien? ¿También puedes ver como hacia el final agrupé dos grupos a la vez?



Ahora la respuesta a $31824 \div 102$ es obviamente 312.

Aquí tienes algunas preguntas más, por si quieres intentar.

3. Calcula $46632 \div 201$.
4. Muestra que $31533 \div 101$ es igual a 312 con un residuo de 21.

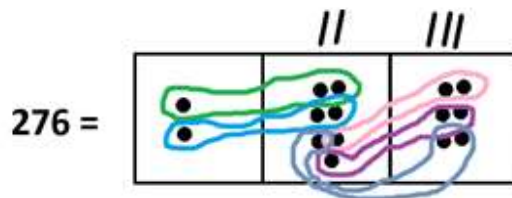
DIVISION POR DIEZ

Usa puntos y casillas para calcular $2130 \div 10$. ¿Puedes explicar por qué con las des-explones la respuesta será 213? Busca grupos de diez en tu dibujo.

La mayoría de la gente dice que para dividir un número que termina con un cero por diez, simplemente se le tacha el último cero. ¿Ahora puedes explicar por qué esa acción de seguro nos lleva a la respuesta correcta?

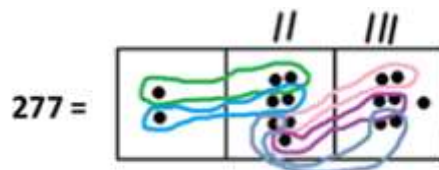
RESIDUOS

En la última sección vimos que $276 \div 12$ es igual a 23.



Supongamos que en su lugar tratamos de calcular $277 \div 12$. ¿Qué dibujo resultaría? ¿Cómo debiéramos interpretar dicho dibujo?

Bueno, veríamos el mismo dibujo anterior excepto que aparecería un punto adicional que no lograríamos incluir en un grupo de doce.



Esto muestra que $277 \div 12$ es igual a 23 con un residuo de 1.

Podrías escribirlo como

$$277 \div 12 = 23 R 1$$

o con alguna notación equivalente para residuo. (La gente de diferentes países usa diferentes notaciones para residuo.) O podrías ser un poco más matemáticamente preciso y decir que $276 \div 12$ equivale a 23 con un punto adicional a ser dividido por doce:

$$277 \div 12 = 23 + \frac{1}{12}.$$

Aquí van algunas preguntas más para que intentes, si quieres.

1. Calcula $2789 \div 11$.
2. Calcula $4366 \div 14$.
3. Calcula $5481 \div 131$.

Al jugar a la división con puntos-y-casillas pudieras decidir que es bueno trabajar de izquierda a derecha en caso de que hayan residuos: queremos que todos los puntos “extra” aparezcan en los niveles bajos, de las unidades y las decenas, en lugar de los niveles altos como el de los miles por ejemplo. (¡Pero aunque no lo hagas así, no estarías equivocado!! Las des-explosiones siempre podrán ayudarte.)

EXPLICACION MAS PROFUNDA

A medida que reflexionamos sobre el proceso de división larga nos damos cuenta que hay puntos sutiles en juego.

Tomémonos un tiempo aquí para pensar más calmadamente sobre la división. Y comencemos con un ejemplo cuya respuesta puede anotarse de inmediato.

¿Qué da $3906 \div 3$?

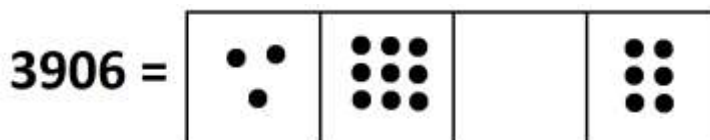
Respuesta: 1302.

¿Qué nos permite ver esta respuesta tan rápidamente?

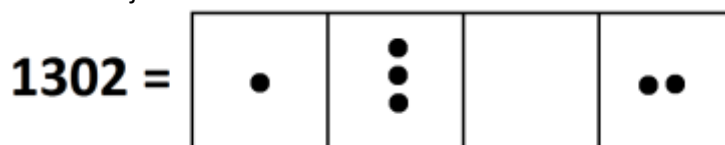
Parece natural pensar en 3906 como $3000 + 900 + 6$. Es fácil dividir cada uno de estos componentes por tres.

$$\begin{array}{l} \text{Dividiendo} \qquad 3906 = 3000 + 900 + 6 \\ \text{Por tres da} \qquad 3906 \div 3 = 1000 + 300 + 2 = 1302. \end{array}$$

¡Buenísimo! Y esta descomposición natural de 3906 la vemos también en el dibujo de puntos y casillas. Literalmente vemos 3 miles, 9 cientos, y 6 unos.



Dividiendo por tres da este dibujo.

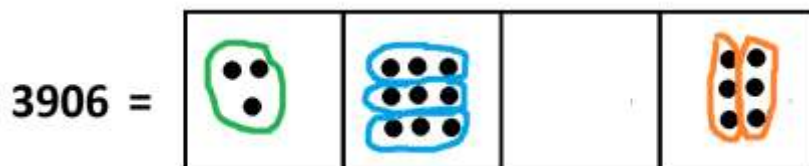


Pero profundicemos aún más en el funcionamiento de este paso final de la división? ¿Qué es lo que realmente ocurrió aquí?

Podemos pensar en la división como la tarea de agrupar: " $3906 \div 3 = ?$ " está en de hecho preguntando

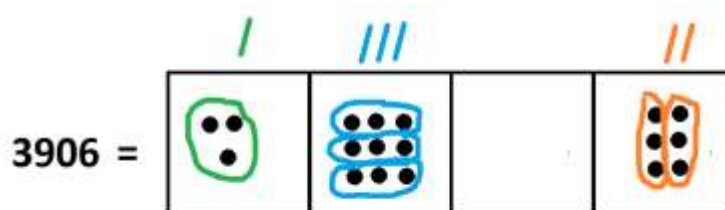
¿Cuántos grupos de tres podemos encontrar en una colección de 3906 objetos?

Sabemos que hay mil grupos de tres en 3000 puntos, y trescientos grupos de tres en 900 puntos y dos grupos de tres en 6 puntos. Y de hecho nuestro dibujo de 3906 lo muestra también.



Si realizáramos todas las des-explotaciones, el lazo verde des-explotaría en mil lazos en el lugar de las unidades. Cada lazo azul des-explotaría en cien lazos en el lugar de las unidades, y como hay tres lazos azules obtendríamos un total de trescientos lazos azules en el lugar de las unidades. Nuestro dibujo muestra que realmente tenemos mil lazos verdes, trescientos lazos azules, y dos lazos naranja. Tenemos 1302 grupos de tres.

Podemos llevar la cuenta con rayitas de conteo mostrando 1 grupo de tres a nivel de miles, 3 a nivel de cienes, 0 a nivel de decenas, y 2 a nivel de unidades, de nuevo 1302 grupos de tres.



Y estas rayitas muestran lo que de hecho ocurre al dividir por tres: cada grupo de tres puntos se transforma en uno. Obtendríamos este dibujo.



El dibujo final muestra cuántos grupos de tres teníamos en los 3906 originales. Pero el dibujo en realidad es innecesario: las rayitas de conteo en el dibujo anterior también muestran esta información. Así que una vez determinadas todas las rayitas de conteo podemos parar de hacer dibujos.

He aquí otra pregunta que quizás quieras o no probar.

- Haz un dibujo de puntos y casillas del número 426 y úsalo para explicar por qué $426 \div 2$ es igual a 213.

Hagamos otro problema. Tratemos $402 \div 3$.

He aquí un dibujo de 402.

$$402 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet \bullet & & \bullet \\ \bullet \bullet & & \bullet \\ \hline \end{array}$$

Estamos buscando grupos de tres. Vemos un grupo a nivel de las centenas. (Este verdaderamente representa cien grupos de tres. Las des-exploran nos lo dan.)

$$402 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{I} & & \\ \hline \bullet \bullet & & \bullet \\ \bullet \bullet & & \bullet \\ \hline \end{array}$$

Ahora parece que nos quedamos atascados.

¡Pero una des-explori3n nos pone en marcha nuevamente!

$$402 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{I} & \text{III} & \\ \hline \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet & \bullet \\ \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \hline \end{array}$$

Y otra des-explori3n.

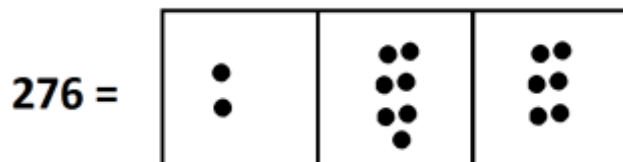
$$402 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{I} & \text{III} & \text{IIII} \\ \hline \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$$

Ahora vemos que hay un cien, tres dieces, y cuatro grupos de tres en la cantidad 402. Por lo tanto $402 \div 3 = 134$.

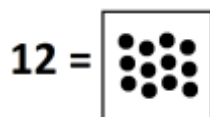
1. Acabamos de demostrar que $402 \div 3 = 134$. ¿Entonces cu3l crees que es la respuesta a $404 \div 3$? ¿Qu3 ver3amos en un dibujo de este problema de divisi3n?
2. Calcula $61230 \div 5$ por el m3todo de puntos-y-casillas. (¿Se hace pesado dibujar tantos puntos? ¿Realmente necesitas dibujarlos?)

Exactamente el mismo razonamiento se le aplica a la división de números multidígitos. Anteriormente examinamos $276 \div 12$.

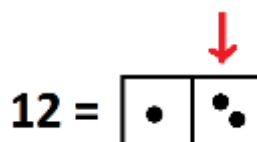
He aquí un dibujo de 276.



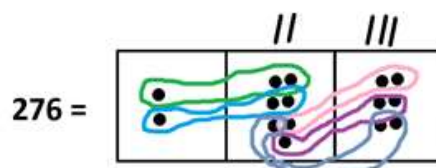
Así se ven doce puntos.



Pero en una máquina $1 \leftarrow 10$ realmente los veríamos como un punto seguido de dos puntos luego de una explosión. (Los doce puntos en realidad aún residen en la casilla de la derecha.)



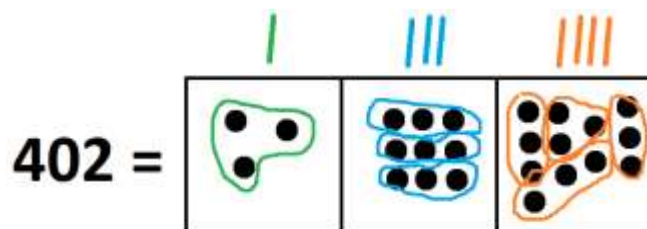
Y cuando buscamos grupos de doce en 276, obtenemos este dibujo.



Vemos dos grupos de 12 a nivel de las decenas y tres 12s a nivel de las unidades. Así la respuesta a $276 \div 12$ es 23.

EL ALGORITMO TRADICIONAL

Aquí esta la forma de mostrar que $402 \div 3$ es igual a 134 usando puntos y casillas.



Esto no se parece en nada al método para resolver problemas de división que usualmente se enseña en las escuelas. Por ejemplo muchas escuelas piden a los estudiantes que calculen $402 \div 3$ con un algoritmo que semeja algo así.

$$\begin{array}{r}
 134 \\
 3 \overline{)402} \\
 \underline{3} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 12 \\
 \underline{12} \\
 0
 \end{array}$$

A primera vista esto parece algo misterioso, pero en la realidad no es distinto al método de puntos y casillas. Para ver por qué, primero usemos el método de estimado que también se le enseña frecuentemente a los estudiantes. Va así:

Para calcular $402 \div 3$ debemos determinar el número de grupos de tres que podemos encontrar en 402.

Adivinemos burdamente primero, digamos, cien grupos de tres

$$\begin{array}{r}
 \text{Groups of 3} \\
 100 \\
 3 \overline{)402}
 \end{array}$$

¿Cuánto nos queda después de quitar cien grupos de tres? Respuesta: 102.

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{)402} \\
 - 300 \\
 \hline
 102
 \end{array}$$

Groups of 3
100

Cuántos grupos de tres quedan en este residuo de 102? Adivinemos que son 30.

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{)402} \\
 - 300 \\
 \hline
 102 \\
 - 90 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

Groups of 3
100

30

Eso deja doce. Y hay cuatro grupos de tres en doce.

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{)402} \\
 - 300 \\
 \hline
 102 \\
 - 90 \\
 \hline
 12 \\
 - 12 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

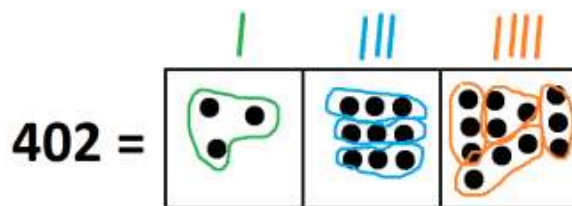
Groups of 3
100

30

4

Esto representa el total de 402. Vemos que hay 134 grupos de tres en esta cuenta.

El método de puntos y casillas está haciendo exactamente el mismo trabajo, pero de manera puramente visual.



Y la tabla que presentamos inicialmente también es idéntica a este método de estimación. Fue inventada para ahorrar tinta ya que no requiere escribir tanto. (Se salta la re-escritura de varios dígitos.)

$$\begin{array}{r} 134 \\ 3 \overline{)402} \\ \underline{3 } \\ 10 \\ \underline{9 } \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)402} \\ -300 \\ \hline 102 \\ -90 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Groups of 3

100

30

4

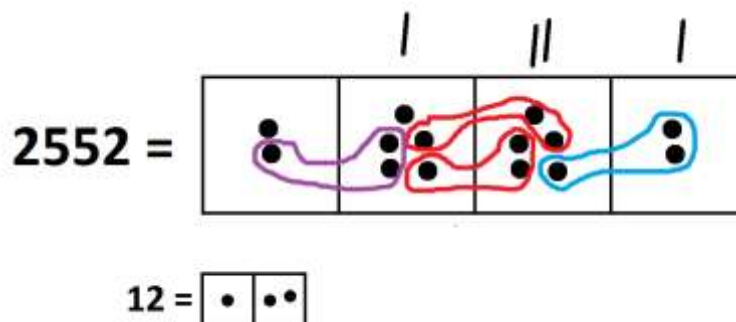


EXPLORACIONES SALVAJES

He aquí algunas investigaciones de “preguntas grandes” que quizás quieras explorar, o tan solo pensar sobre ellas. ¡Diviértete!

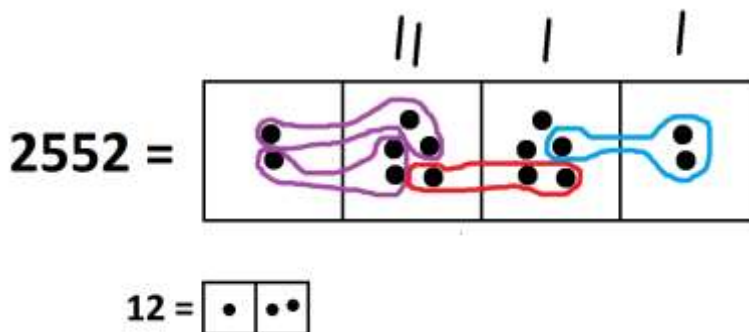
EXPLORACION: ¿DE IZQUIERDA A DERECHA? ¿DE DERECHA A IZQUIERDA? ¿CUALQUIER ORDEN?

Cuando le piden a Kaleb que calcule $2552 \div 12$ el hace este dibujo, el cual obtiene identificando grupos de doce de derecha a izquierda.



El dijo que la respuesta a $2552 \div 12$ es 121 con un residuo de 1100.

Mabel, por otra parte, identificó grupos de doce de izquierda a derecha en su diagrama del problema.



Ella concluyó que $2552 \div 12$ es 211 con un residuo de 20.

Tanto Kaleb como Mabel están en lo correcto matemáticamente, pero su maestra indicó que la mayoría de las personas esperarían una respuesta con un residuo más pequeño: tanto 1100 como 20 serían considerados residuos extraños en un problema de división por doce. También les mostró a Kaleb y a Mabel la respuesta que aparece impreso en el libro de texto.

$$2552 \div 12 = 212 R 8$$

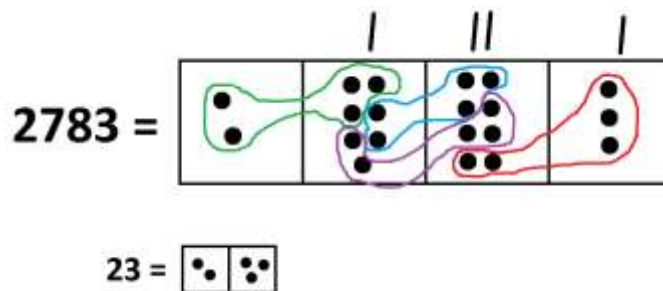
¿Cómo pueden Kaleb y Mabel continuar el trabajo en sus diagramas hasta obtener esta respuesta del texto?



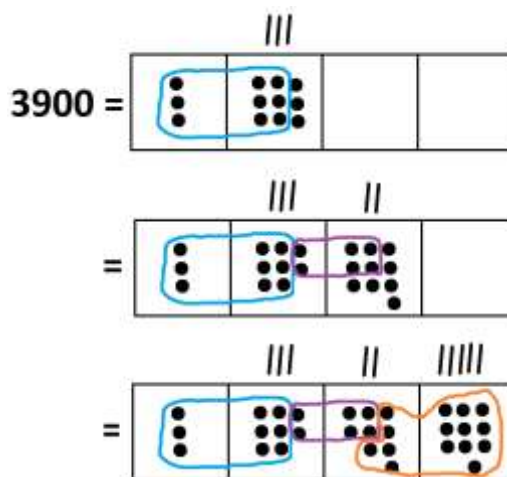
SOLUCIONES

Como prometido, aquí están las soluciones a los problemas planteados.

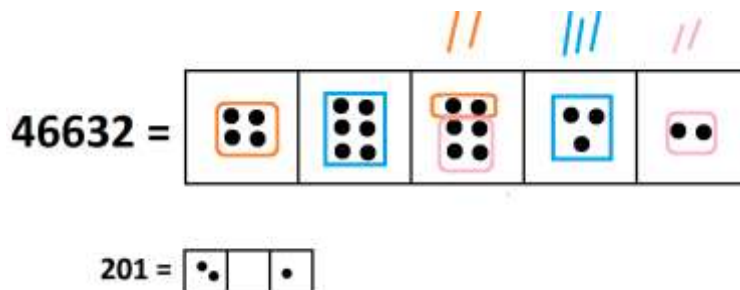
1. $2783 \div 23 = 121$.



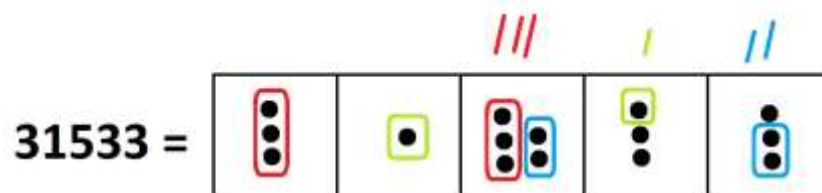
2. $3900 \div 12 = 325$. Necesitamos algunas des-explusiones a lo largo del camino. (¿Ves cómo voy adquiriendo eficiencia en la manera como dibujo mis lazos?)



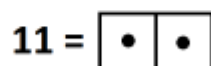
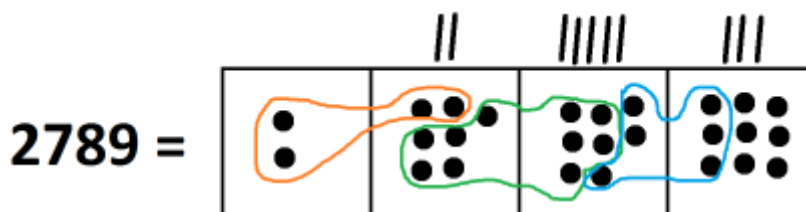
3. $46632 \div 201 = 232$.



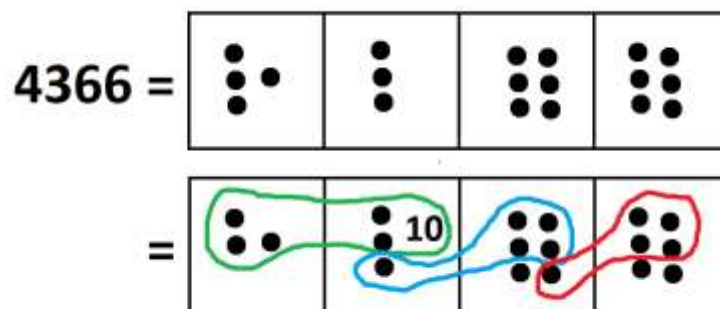
4.



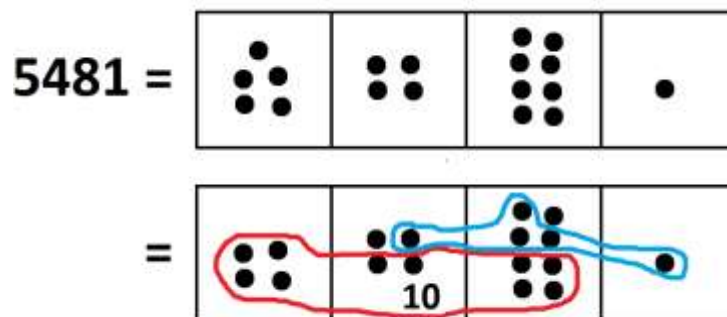
5. Tenemos $2789 \div 11 = 253$ con un residuo de 6. Es decir, $2789 \div 11 = 253 + \frac{6}{11}$.



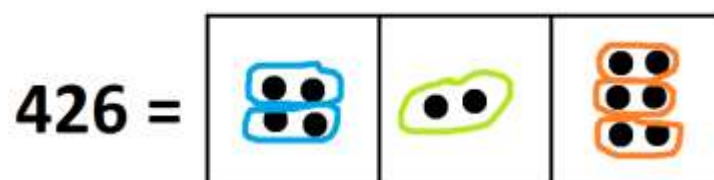
6. $4366 \div 14 = 311 + \frac{12}{14}$.



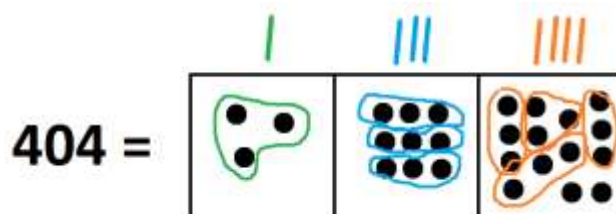
7. $5481 \div 131 = 41 + \frac{110}{131}$.



8. Vemos dos grupos de dos a nivel de las centenas (todos los puntos en el lazo azul des-explotarían para producir doscientos grupos azules de dos a nivel de las unidades), un grupo de dos a nivel de las decenas (todos los puntos del lazo verde des-explotarían para producir diez grupos de dos a nivel de las unidades), y tres grupos naranja de dos a nivel de las unidades. Eso da 213 grupos de dos.



9. En este dibujo para $404 \div 3$ vemos dos puntos restantes que no se han tomado en cuenta.

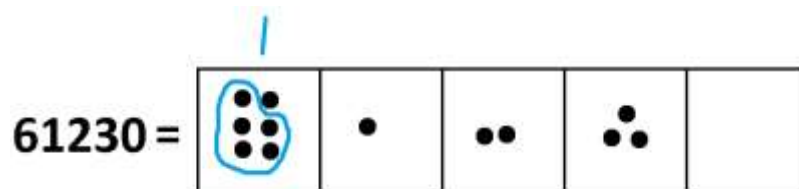


Entonces $404 \div 3$ es igual a 134 con un residuo de 2.

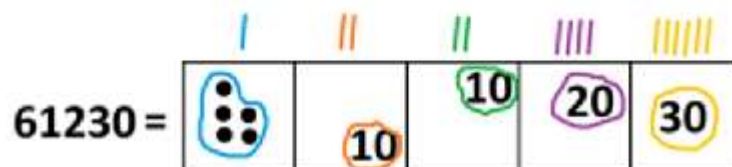
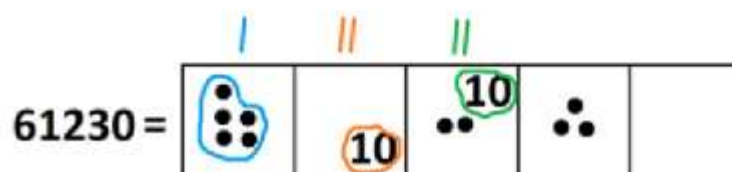
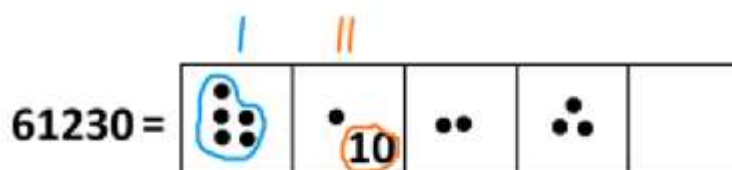
Nota: Podemos interpretar este residuo como “dos puntos aun a ser divididos por tres,” y por tanto escribir

$$404 \div 3 = 134 + \frac{2}{3}.$$

10. Definitivamente vemos un grupo de cinco inmediatamente.



Realicemos algunas des-explusiones. (Y dibujemos números en lugar de dibujar muchos puntos. ¡Se hace tedioso dibujar tantos puntos!)



Vemos que $61230 \div 5 = 12246$.