



Uplifting Mathematics for All

ЕКСПЛОДИРАЩИ ТОЧКИ

ГЛАВА 5

ДЕЛЕНИЕ

Събиране, изваждане, умножение. Сега е време за деление.

Ето една примерна задача за деление: Пресметнете $276 \div 12$.

А ето и един ужасен начин да я решим: *На лист хартия нарисуйте картинка с 276 точки, след което започнете да закръгляте групички от по дванадесет точки. След около час ще видите, че на картинката има точно 23 групички от по дванадесет точки.*

Ето и един добър начин да я решим: *На лист хартия нарисуйте картинка с 276 точки в една $1 \leftarrow 10$ машина и веднага ще забележите, че на картинката има точно 23 групички от по дванадесет точки!*

Продължете да четете и да си играете и ще видите как ще го направим!

Знаете ли че: Символът за деление \div се нарича още *обелос*.

Да започваме

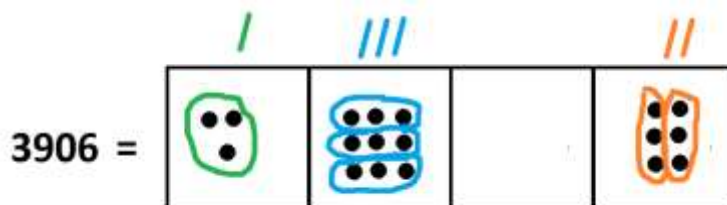
Нека започнем бавно с една задача за деление, чийто отговор човек може да види веднага.

Колко е $3906 \div 3$?

Отговорът е 1302.

Ако си мислите за 3906 като за $3000 + 900 + 6$, тогава можете да видите, че разделяйки трите числа поотделно получаваме $1000 + 300 + 2$.

И наистина можем да видим това като нарисуваме картинка на 3906 в една $1 \leftarrow 10$ машина. Видяваме групички от по три: 1 група на ниво хиляди, 3 групи на ниво стотици и 2 групи на ниво единици.



Това е! Ние извършваме деление и виждаме как отговорът изскача директно пред очите ни! Опитайте се да решите $402 \div 3$ само с картинка на точки и кутии. Виждате ли как отексплозии могат да отключат пътя ни към отговора 134?

Ако искате да помислите по-дълбоко за това какво точно се случва в тези картинки (толкова лесно ли е, колкото изглежда?) прескочете до секцията “По-дълбоко обяснение” по-нататък в тази глава.

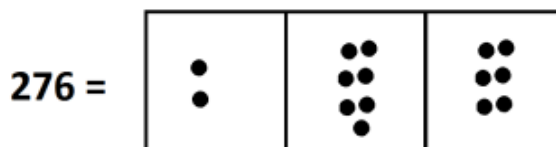
Но ако се чувствате готови да продължите нататък сега ... то тогава нека продължим!

Деление на големи числа

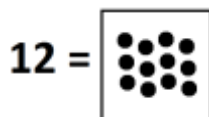
Доволни сме с делението на едноцифрени числа. А какво можем да кажем за деление на многоцифрени числа?

Нека погледнем задачата $276 \div 12$.

Ето картинка на 276 в една $1 \leftarrow 10$ машина.



Сега ние търсим групички от по дванадесет в тази картинка на 276 . Ето как изглежда числото дванадесет.



Всъщност това не е точно така, защото можем да направим една експлозия в нашата $1 \leftarrow 10$ машина. Дванадесет тогава ще изглежда като една точка до две точки. (Но ние винаги ще знаем, че това всъщност е картинка, в която всичките дванадесет точки стоят в най-дясната кутия.)

$$12 = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

Така. Търсим групички от по 12 в нашата картинка на 276 . Вие виждате ли да има една точка до други две точки на диаграмата?

Да. Ето една групичка.

$$276 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

Във всяко кръгче от по 12 , което намерим, знаем, че 12 -те точки всъщност се намират в най-дясната част на кръгчето. Следователно ние току що намерихме една групичка от 12 точки на ниво десетици.

$$276 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

На картинката намираме още групички от по дванадесет.

$$276 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array}$$

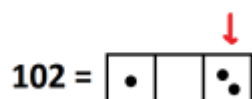
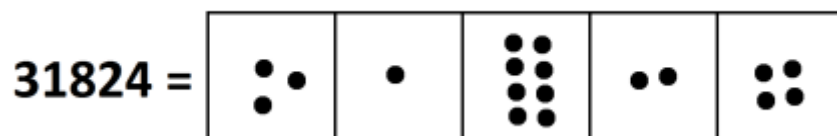
Виждаме общо две групички от по 12 на ниво десетици, както и три групички от по 12 на ниво единици. И значи отговорът на $276 \div 12$ е 23 .

Ето няколко задачи за упражнение, които може да се опитате, а може и да не се опитате, да решите. Моите отговори ще намерите в края на главата.

1. Сметнете $2783 \div 23$ чрез метода на точките и кутиите на ръка.
2. Сметнете $3900 \div 12$.

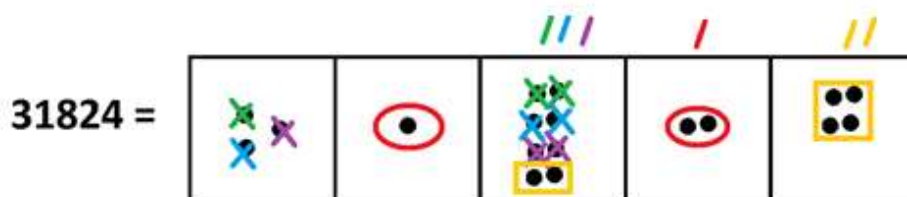
Нека направим още един пример. Да сметнем $31824 \div 102$.

Ето и картинката.



Сега ние търсим групички от по една точка до нула точки до две точки в картинката на числото 31824 . (И не забравяйте, че всичките 102 точки се намират физически в най-дясната възможна позиция във всяко кръгче, което открием.)

Виждат се няколко такива групички. (В този момент рисуването на кръгчета създава бъркотия, така че ще рисувам хиксчета, кръгчета и кутийки вместо това. Става ли? Също така забелязахте ли как накрая оградих две групи наведнъж?)



Сега отговорът 312 на задачата $31824 + 102$ се вижда на рисунката.

Ето още няколко въпроса, които можете да опитате ако искате.

3. Пресметнете $46632 + 201$.
4. Покажете, че $31533 + 101$ е равно на 312 с остатък 21 .

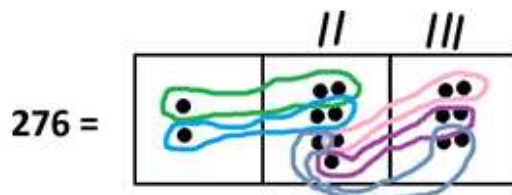
ДЕЛЕНИЕ НА ДЕСЕТ

Използвайте подхода на точки и кутии, за да сметнете $2130 + 10$. Можете ли да обясните с отексплозии защо отговорът е 213 ? Търсете групички от по десет на картинката.

Повечето хора биха казали, че за да разделите на десет едно число, което завършва на нула, можете просто да задраскате нулата. Можете ли да обясните защо това действие действително винаги дава верния отговор?

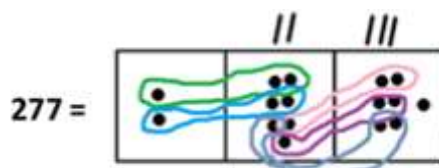
ОСТАТЪЦИ

В предходната секция видяхме, че $276 \div 12$ е равно на 23 .



Да предположим, че вместо това опитахме да сметнем $277 \div 12$. Каква картинка бихме получили? Как бихме я интерпретирали?

Е, ще получим същата картинка като преди, само че с изключение на една допълнителна точка, която няма да можем да включим в нито една групичка от по дванадесет.



Това показва, че $277 \div 12$ е равно на 23 и остатък 1 .

Това може да се запише като

$$277 \div 12 = 23 R 1$$

или по някой друг начин за записване на остатъци. (Хората от различните държави използват различни начини да записват остатъците.) Или ако искате да сте малко по-математически точни, можете да кажете, че $276 \div 12$ прави 23 , заедно с още една точка, която все още чака да бъде разделена на дванадесет:

$$277 \div 12 = 23 + \frac{1}{12}$$

Ето още няколко въпроса, по които можете да помислите, ако искате.

5. Пресметнете $2789 \div 11$.
6. Пресметнете $4366 \div 14$.
7. Пресметнете $5481 \div 131$.

Докато си играете с делението с точки и кутии, може би ще достигнете до извода, че е добре да започнете от дясно наляво, в случай че има остатъци: ние бихме искали всичките тези “допълнителни” точки да останат в по-ниските нива, на единиците и на десетиците, вместо в по-високите, например на хилядите. (Но дори и да предпочетете да не правите това, пак няма да сбъркате! Отексплозиите винаги ще могат да ви помогнат.)

ПО-ДЪЛБОКО ОБЯСНЕНИЕ

Когато човек се замисли върху процесът на деление постепенно осъзнава, че има някои тънкости, които се случват.

Нека отделим малко време да помислим повече върху делението. И нека започнем с примера, чийто отговор можем веднага да запишем.

На колко е равно $3906 \div 3$?

Отговор: 1302.

Поради какво можем да видим отговора толкова бързо?

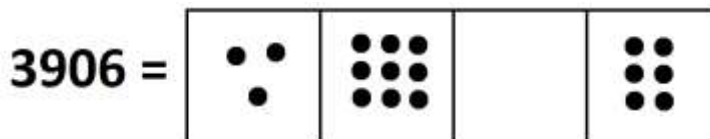
Изглежда естествено да си мислим за 3906 като за $3000 + 900 + 6$. Лесно е да разделим всеки всяка от тези части на три.

Ако разделим числото $3906 = 3000 + 900 + 6$

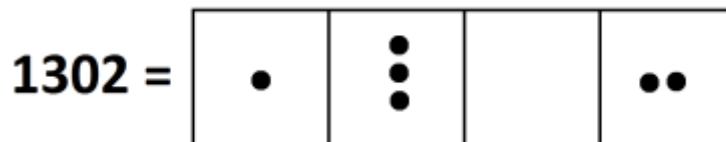
на три получаваме

$$3906 \div 3 = 1000 + 300 + 2 = 1302.$$

Чудесно! Можем също така да видим това естествено разлагане в картинката с точки и кутии на числото 3906. Ние буквално виждаме 3 хиляди, 9 стотици и 6 единици.



Делим на три и получаваме следната картинка.

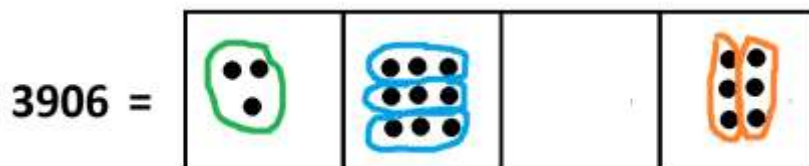


Но нека проучим по-отблизо как работи тази последна стъпка с делението. Какво всъщност се случи?

Можем да си мислим за делението като задача за групиране: " $3906 \div 3 = ?$ " всъщност ни пита следното

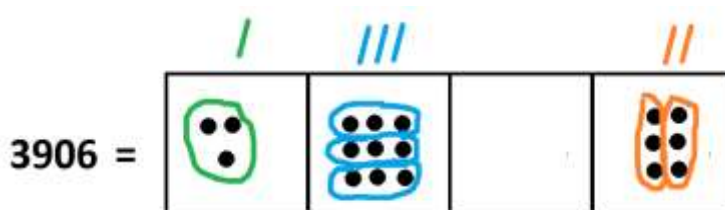
Колко групички от по три предмета можете да намерите в една купчина от 3906 предмета?

Ние знаем, че има хиляда групички от по три в една купчина от 3000 точки и че има триста групички от по три в една купчина от 900 точки, и че има две групички от по три в една купчина от 6 точки. Нашата картинка на числото 3906 всъщност ни показва същото нещо.



Ако бяхме извършили всичките отексплозии, то тогава зеленото кръгче от точки щеше да отексплодира и да се превърне в хиляда зелени кръгчета на нивото на единиците. Всяко от сините кръгчета от точки отексплодира и се превръща в сто сини кръгчета на нивото на единиците и понеже имаме три сини кръгчета, получаваме общо триста сини кръгчета на нивото на единиците. Виждаме, че рисунката ни всъщност представлява една картинка на хиляда зелени кръгчета, триста сини кръгчета и две оранжеви кръгчета. Тоеси, имаме общо 1302 групички от по три.

Можем да използваме чертички (рабош) за да покажем, че имаме 1 групичка от три на нивото на хилядите, 3 на нивото на стотиците, 0 на нивото на десетиците и 2 на нивото на единиците, или, още веднъж, 1302 групички от по три.



И тези чертички ни показват какво ще се случи ако решим наистина да разделим на три: всяка група от по три точки ще се превърне в една точка. Бихме получили следната картинка.



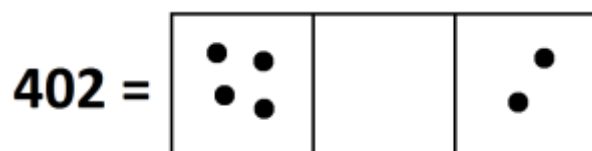
Тази последна картинка показва колко групички от по три имаме в първоначалното число 3906. Но в края на краищата не ни се наложи да рисуваме тази последна картинка: чертичките отгоре на картинката преди това показват същата информация. Така че можем да спрем да рисуваме веднага щом сме се оправили с всички чертички.

Ето още един въпрос за упражнение, по който можете да си помислите, ако искате, или пък не.

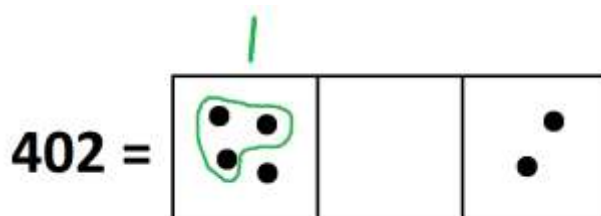
8. Нарисувайте картинка с точки и кутии на числото 426 и я използвайте за да си обясните защо $426 \div 2$ е равно на 213 .

Нека решим още една задача. Да опитаем $402 \div 3$.

Ето картинката на числото 402 .

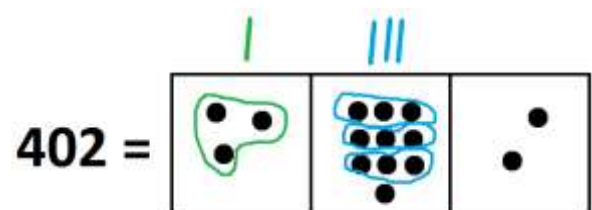


Търсим групички от по три в нея. Виждаме, че има една групичка на нивото на стотиците. (Това едно кръгче наистина представлява сто групички от по три. Отексплозиите го потвърждават.)

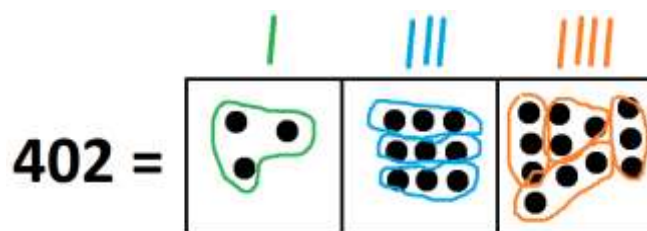


А сега изглежда, че не знаем как да продължим.

Но след една отексплозия можем да продължим отново!



И след още една отексплозия получаваме.

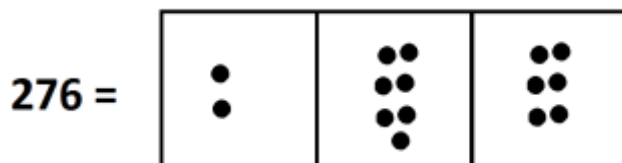


Сега вече можем да видим, че на картинката има сто, плюс три по десет и още четири групички от по три в числото 402 . Следователно $402 \div 3 = 134$.

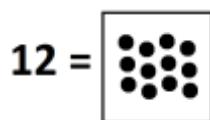
9. Току що показахме, че $402 \div 3 = 134$. А тогава според вас какъв е отговорът на $404 \div 3$? Какво бихме видяли ако нарисуваме една картинка на тази задача за деление?
10. Пресметнете $61230 \div 5$ чрез подхода на точките и кутиите.
(Уморихте ли се да рисувате точки? Трябва ли всъщност да ги рисувате всеки път?)

Абсолютно същото нещо може да приложим за деление на многоцифрени числа. Преди малко ние решихме $276 \div 12$.

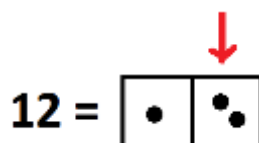
Ето една картинка на числото 276 .



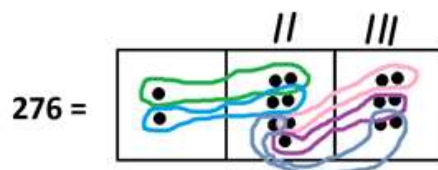
Ето и как изглежда една картинка на дванадесет точки.



Но в една $1 \leftarrow 10$ машина ние всъщност бихме искали да ги видим като една точка до две точки след една експлозия. (И все пак, всичките дванадесет точки всъщност се намират в най-дясната кутия.)



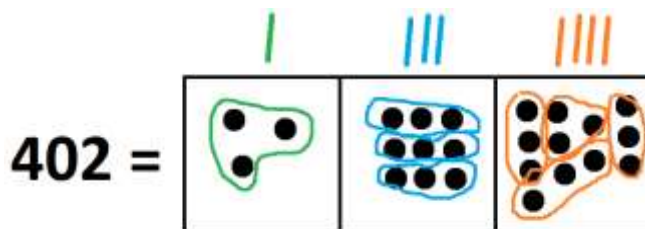
И щом отидем на лов за групички от по дванадесет в 276 , ние получаваме следната картинка.



Виждаме, че има две групички от по 12 на нивото на десетиците и три групички от по 12 на нивото на единиците. И значи отговорът на $276 \div 12$ всъщност е 23 .

ТРАДИЦИОННИЯТ АЛГОРИТЪМ

Ето как с точки и кутии можем да покажем, че $402 \div 3$ е равно на 134 .



Това по никакъв начин не изглежда като метода за деление, който обикновено се учи в училище.

Например, много училища карат учениците да пресмятат $402 \div 3$ чрез алгоритъм, който изглежда по следния начин.

$$\begin{array}{r}
 134 \\
 3 \overline{)402} \\
 \underline{3} \\
 10 \\
 \underline{9} \\
 12 \\
 \underline{12} \\
 0
 \end{array}$$

На пръв поглед той изглежда много мистериозен, но всъщност не е с нищо по-различен от метода на точките и кутиите. За да видим защо, нека първо разгледаме един метод за пресмятане на задачи за деление, който също често се преподава на ученици. Той е следният:

За да пресметнем $402 \div 3$ е необходимо да намерим броят на групите от по три в числото 402 .

Нека направим първо едно предположение, например сто групи от по три.

$$\begin{array}{r}
 \text{Groups of 3} \\
 3 \overline{)402} \qquad 100
 \end{array}$$

Колко остава след като вземем сто групи от по три? Отговор: 102 .

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{)402} \\
 - 300 \\
 \hline
 102
 \end{array}$$

Groups of 3
100

Колко групи от по три има в оставащите 102? Нека предположим, че са 30.

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{)402} \\
 - 300 \\
 \hline
 102 \\
 - 90 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

Groups of 3
100

30

Това оставя след себе си още дванадесет. А в тези дванадесет има четири групи от по три.

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{)402} \\
 - 300 \\
 \hline
 102 \\
 - 90 \\
 \hline
 12 \\
 - 12 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Groups of 3
100

30

4

Това означава, че общият брой групи от по три в числото 402 е 134.

Методът на точките и кутиите прави абсолютно същото нещо, само че напълно визуално.

$$402 = \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{c} | \\ \hline \text{[3 dots]} \end{array} & \begin{array}{c} ||| \\ \hline \text{[10 dots]} \end{array} & \begin{array}{c} |||| \\ \hline \text{[12 dots]} \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

А таблицата с алгоритъмът, който първо представихме, също е идентична на този метод с предположенията. Алгоритъмът е бил измислен само за да се хаби по-малко мастило, тъй като при него не ни се налага да пишем толкова много. (Прескача се преписването на няколко цифри.)

$$\begin{array}{r} 134 \\ 3 \overline{)402} \\ \underline{3 } \\ 10 \\ \underline{9 } \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)402} \\ -300 \\ \hline 102 \\ -90 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Groups of 3

100

30

4

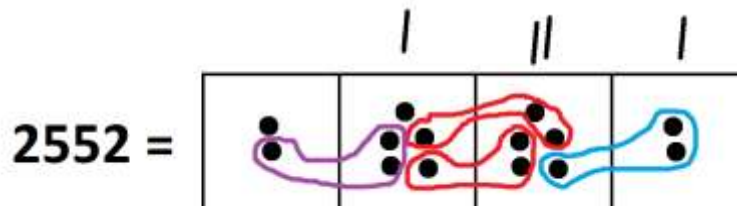


ЗА ЩУРИ ИЗСЛЕДОВАТЕЛИ

Ето един “голям въпрос” за изследване, с който може да решите да се захванете, или поне да помислите по него. Приятно забавление!

ОБЕКТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ: ОТ ЛЯВО НАДЯСНО? ОТ ДЯСНО НАЛЯВО? В КОЯ ДА Е ПОСОКА?

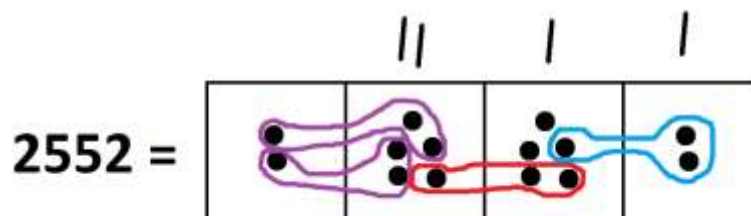
Когато го помолили да изчисли $2552 \div 12$, Калевб нарисувал следната картинка, която получил като заграждал групички от по дванадесет, работейки от дясно наляво.



$$12 = \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

Той казал, че отговорът на $2552 \div 12$ е 121 с остатък 1100.

Мабел от своя страна разпознала следните групи от по дванадесет от ляво надясно, когато тя решавала задачата.



$$12 = \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

Тя установила, че $2552 \div 12$ прави 211 с остатък 20.

Отговорите и на Калевб и на Мабел са математически правилни, но учителката им заявила, че повечето хора биха очаквали отговор с по-маък остатък: както 1100, така и 20 биха им се сторили странни остатъци в задача за деление на дванадесет. Тя им показала отговорът на задачата, който бил записан в учебника.

$$2552 \div 12 = 212 R 8$$

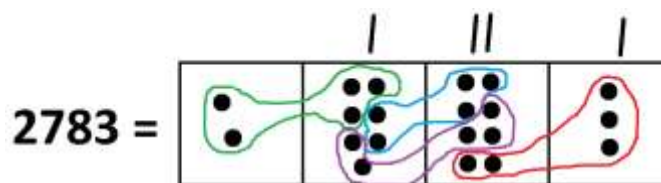
Как Калевб и Мабел биха продължили да работят върху решенията си, така че да получат крайния резултат от учебника?



РЕШЕНИЯ

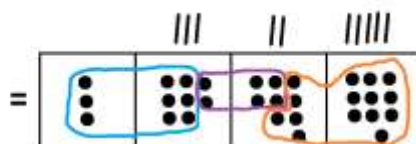
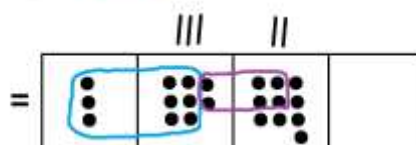
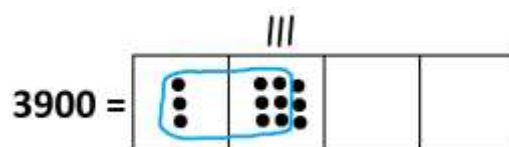
Както ви обещах, тук са решенията на въпросите от преди малко.

1. $2783 \div 23 = 121$.

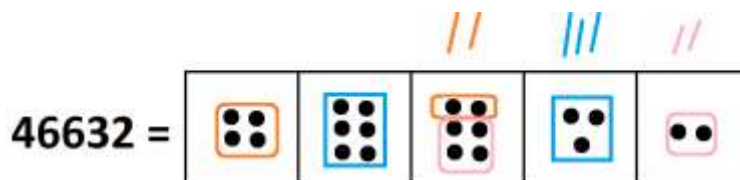


$23 =$

2. $3900 \div 12 = 325$. Нуждаем се от няколко отексплозии докато решаваме. (Също така, виждате ли как се опитвам да съм ефективен чрез начина, по който рисувам кръгчетата?)



3. $46632 \div 201 = 232$.



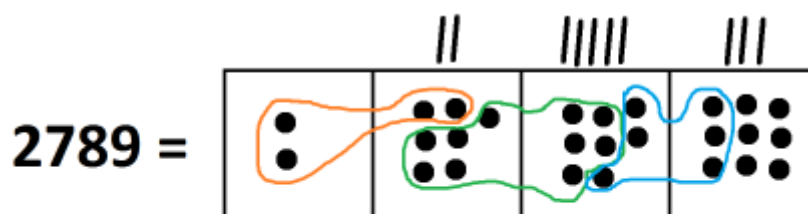
$201 =$

4.



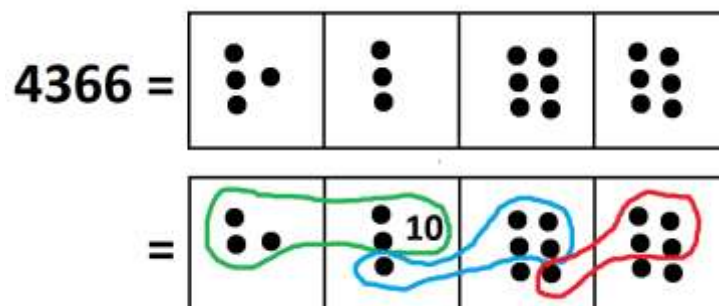
$$101 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & & \bullet \\ \hline \end{array}$$

5. Имаме $2789 \div 11 = 253$ с остатък 6. Тоест, $2789 \div 11 = 253 + \frac{6}{11}$.

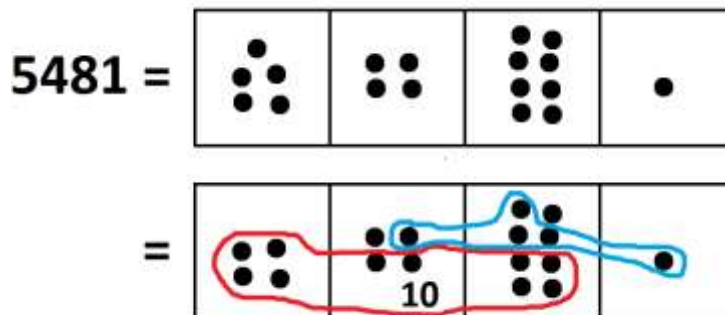


$$11 = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$$

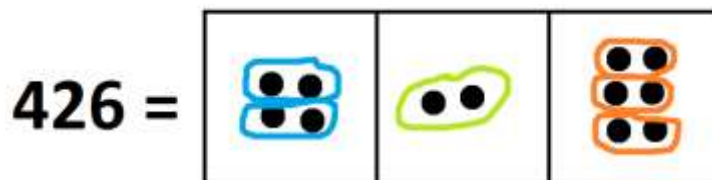
6. $4366 \div 14 = 311 + \frac{12}{14}$.



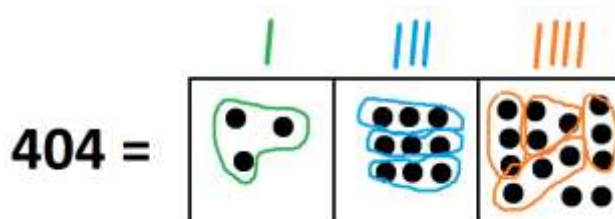
7. $5481 \div 131 = 41 + \frac{110}{131}$.



8. Виждаме две групички от по две на нивото на стотиците (всичките точки в сините кръгчета биха отексплодирали и биха се превърнали в двеста сини кръгчета от по две на нивото на единиците), една групичка от по две на нивото на десетиците (всичките точки в зелените кръгчета биха отексплодирали и биха се превърнали в десет зелени кръгчета от по две на нивото на единиците) и три оранжеви групички от по две на нивото на единиците. Всичко това прави 213 групички от по две.



9. В картинката за $404 \div 3$ виждаме две останали точки, които не са оградени.



Следователно $404 \div 3$ е равно на 134 и остатък 2 .

Забележка: Можем да си представяме този остатък като “две точки, които все още чакат да бъдат разделени на три,” и да запишем

$$404 \div 3 = 134 + \frac{2}{3}$$

10. Веднага виждаме една групичка от пет точки.

$$61230 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \overset{|}{\text{●●●●}} & \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \\ \hline \end{array}$$

Нека извършим няколко отексплозии. (И няка записваме числата, вместо да рисуваме купичка точки. Рисуването на точки става изморително!)

$$61230 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \overset{|}{\text{●●●●}} & \overset{||}{\text{●}} & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \\ \hline \end{array}$$

$$61230 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \overset{|}{\text{●●●●}} & \overset{||}{\text{●}} & \overset{||}{\text{●●}} & \cdot\cdot\cdot & \\ \hline \end{array}$$

$$61230 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \overset{|}{\text{●●●●}} & \overset{||}{\text{●}} & \overset{||}{\text{●●}} & \overset{|||}{\text{●●●}} & \\ \hline \end{array}$$

$$61230 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \overset{|}{\text{●●●●}} & \overset{||}{\text{●}} & \overset{||}{\text{●●}} & \overset{|||}{\text{●●●}} & \overset{||||}{\text{●●●●}} \\ \hline \end{array}$$

Виждаме, че $61230 \div 5 = 12246$.