



Uplifting Mathematics for All

PUNTOS EXPLOSIVOS CAPITULO 4

SUSTRACCION

Sigamos trabajando con la máquina $1 \leftarrow 10$.

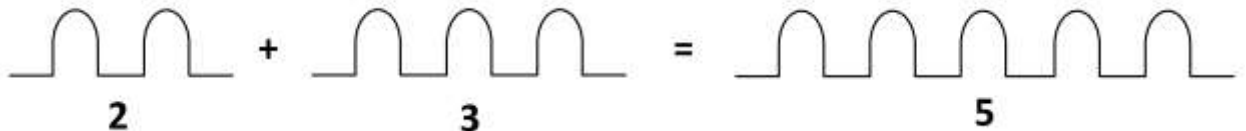
Hasta ahora le hemos dado sentido a la adición y a la multiplicación. Pero nos saltamos la sustracción. ¿Por qué? ¡Porque yo no creo en la sustracción! Para mi, la sustracción es simplemente la adición del opuesto.

Expliquemos qué quiero decir con esto.

NUMEROS NEGATIVOS

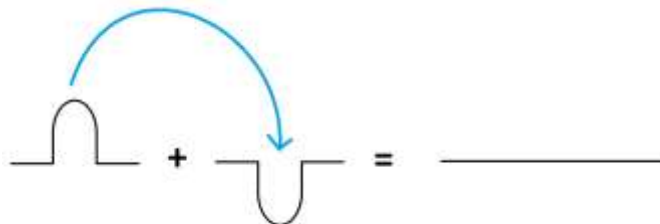
MI falta de creencia en la sustracción proviene de otra historia que no es verdadera. Brevemente, va así.

De niño solía con frecuencia jugar en un arenero. Y allí descubrí los números positivos como pilas de arena: una pila, dos pilas, y así sucesivamente. Y así también descubrí la adición de números positivos simplemente como pilas alineadas. Por ejemplo, ví cómo dos más tres equivale a cinco simplemente colocando las pilas en línea.



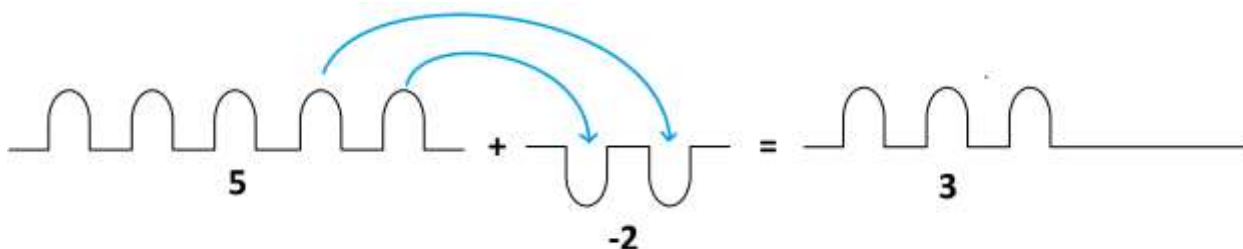
Me divertí por horas explorando la adición contando y alineando pilas.

¡Pero un día tuve un asombroso destello de percepción! En lugar de hacer pilas de arena, me dí cuenta que también podía hacer huecos. Y de inmediato vi que un hueco es el opuesto de una pila: juntas una pila y un hueco y se cancelan una a la otra. ¡Woa!



Más tarde en la escuela me enseñaron a llamar a un hueco “ -1 ”, y a dos huecos “ -2 ,” y así sucesivamente y me dijeron que hiciera esta cosa llamada “sustracción.” Pero nunca creí

realmente en la sustracción. Mis colegas, digamos, leían $5 - 2$ como “cinco menos dos,” pero yo lo pensaba como cinco pilas sumadas a dos huecos. El dibujo muestra que la respuesta es tres pilas.



Si. Por supuesto que obtengo la misma respuesta que mis colegas: los dos huecos “se llevaron” a dos de las pilas. Pero yo tenía una ventaja. Por ejemplo, mis colegas decían que no hay respuesta a $7 - 10$. Yo veía que si la había.

$$\begin{aligned} 7 - 10 &= \text{siete pilas y diez huecos} \\ &= \text{tres huecos} \\ &= -3 \end{aligned}$$


¡Fácil!

La sustracción es simplemente la adición del opuesto.

(De paso, con gusto escribo $7 - 10$ como “ $7 + -10$.” Esto hace el razonamiento más obvio.)

Volvamos ahora a las máquinas de puntos-y-casillas, en particular la máquina $1 \leftarrow 10$.

Ahí trabajamos con puntos, que hemos dibujado como puntos relleno.

 = punto

Ahora necesitamos la noción de lo opuesto a un punto, así como el hueco es el opuesto a la pila. Voy a dibujar el opuesto de un punto como un punto vacío y lo llamaré antipunto.

 = antipunto

Tal y como la materia y la antimateria, y 1 y -1 en pilas y huecos, se aniquilan mutuamente cuando se juntan, un punto y un antipunto también deben aniquilarse cuando los juntamos – ¡POOF! – y dejar nada atrás.

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & + & \circ & = & \text{radiating lines} \\
 1 & & -1 & & 0
 \end{array}$$

Y tal como hicimos con pilas y huecos, podemos llevar a cabo aritmética básica con puntos y antipuntos.

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet \bullet \bullet \circ \circ & = & \bullet \\
 \bullet \bullet \circ & & \bullet \\
 5 + -3 & = & 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \circ \bullet \circ & = & \circ \\
 \circ \bullet & & \\
 2 + -3 & = & -1
 \end{array}$$

Aparte: De paso, algunos estudiantes prefieren llamar al opuesto de punto un *topun*. ¿Puedes adivinar qué les hizo pensar en ese nombre?

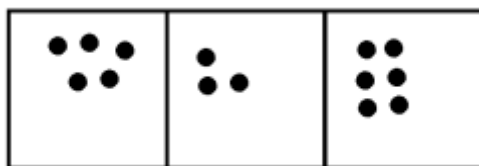
SUSTRACCION

Considera este problema de sustracción.

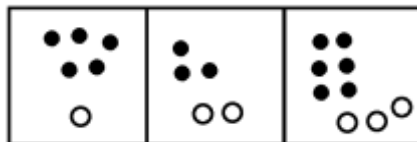
$$\begin{array}{r}
 536 \\
 - 123 \\
 \hline
 \end{array}$$

Para mí, estos es 536 más el opuesto a 123.

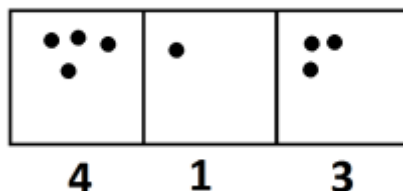
El primer número, 536, se ve así en una máquina $1 \leftarrow 10$: cinco puntos, tres puntos, seis puntos.



A esto le sumamos el opuesto de 123. Es decir, estamos sumándole un anti-cien, dos anti-dieces y tres anti-unos.



Y ahora ocurren muchas aniquilaciones: ¡POOF!; ¡POOF POOF!; ¡POOF POOF POOF!



Vemos aparecer la respuesta 413.

Y dáte cuenta, obtenemos esta respuesta como si trabajáramos de izquierda a derecha diciendo

5 menos 1 es 4,
3 menos 2 es 1,

y

6 menos 3 es 3.

¡Si! De nuevo de izquierda a derecha!

$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline 413 \end{array}$$

Bueno. Este ejemplo estuvo muy sencillo. ¿Qué tal $512 - 347$?

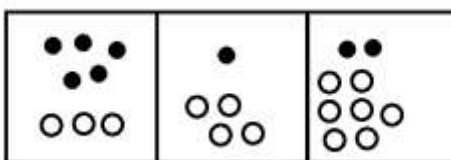
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline \end{array}$$

Yendo de izquierda a derecha, tenemos: 5 menos 3 es 2, 1 menos 4 es -3 , y 2 menos 7 es -5 . La respuesta es dos cientos tres dieces negativos y cinco negativos.

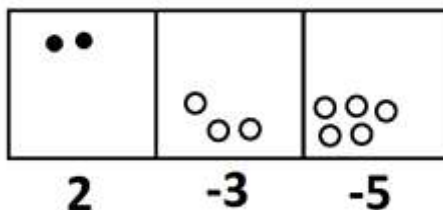
$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

¡Y esta respuesta es matemáticamente absolutamente correcta! El dibujo muestra que lo es.

Aquí están cinco cientos, un diez y dos unos junto a tres anti-cientos, cuatro anti-dieces, y siete anti-unos.



Y luego de muchas aniquilaciones nos quedan dos cientos, tres anti-dieces, y cinco anti-unos.

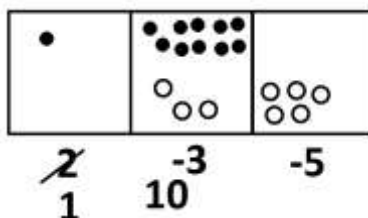


¡En realidad la respuesta es dos cientos menos tres dieces menos cinco!

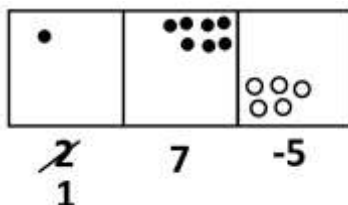
Pero, por supuesto, dar la respuesta a este problema de sustracción de esta manera es muy extraño para la sociedad. ¿Podemos arreglar esta matemáticamente correcta respuesta en beneficio de la sociedad?

Requiere un destello de visión para percatarnos de que podemos des-explotar puntos: cada punto en una casilla debe haber proveniendo de diez puntos de la casilla a su izquierda.

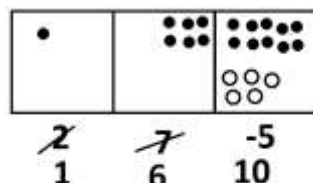
Bueno. Des-explotemos uno de los dos puntos que tenemos en la casilla del extremo izquierdo. Cuando hacemos eso nos resulta el siguiente dibujo.



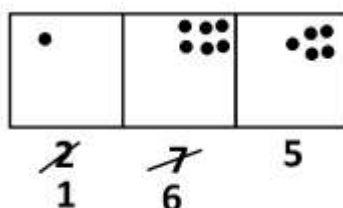
Luego de las aniquilaciones, vemos que ahora tenemos la respuesta ciento setenta menos cinco. ¡Bellísimo!



Des-explotemos otra vez.



Y con más aniquilaciones vemos una respuesta que la sociedad puede entender: ciento sesenta y cinco.



EL ALGORITMO TRADICIONAL

¿Cómo se compara este método de puntos-y-casillas con el algoritmo estándar?

Considera otra vez $512 - 347$.

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

El algoritmo estándar nos tiene viendo primero “2 menos 7,” lo cual no podemos hacer. (Bueno lo podemos hacer, es -5 , pero en este algoritmo no está permitido escribir eso.)

¿Entonces qué hacemos?

“Tomamos prestado.” Es decir, tomamos un punto de la columna de los dieces y lo explotamos para generar diez unos. Eso deja cero puntos en la columna de los dieces. Debemos escribir diez unos para acompañar a los dos de la columna de los unos.

$$\begin{array}{r} \\ 5 \cancel{1} 2 \\ -3 \ 4 \ 7 \\ \hline \end{array}$$

Pero somos listos y simplemente escribimos 12 en lugar de $10 + 2$. (Es decir, ponemos un 1 delante del 2 para hacerlo ver como un doce.)

$$\begin{array}{r} \\ 5 \cancel{1} 12 \\ -3 \ 4 \ 7 \\ \hline \end{array}$$

Luego decimos “doce menos cinco” y escribimos la respuesta.

$$\begin{array}{r} \\ 5 \cancel{1} 12 \\ -3 \ 4 \ 7 \\ \hline 5 \end{array}$$

La columna de la derecha esta completa. Pasemos ahora a la columna del medio.

Vemos “cero menos cuatro,” lo cual no se puede hacer. Entonces hagamos otra explosión, es decir, otro “préstamo,” para ver $10 - 4$ en esa columna. Escribimos la respuesta 6.

Nos movemos entonces a la última columna donde tenemos $4 - 3$, que es 1.

$$\begin{array}{r} 4 \cancel{0} \\ \cancel{5} \cancel{1} 12 \\ -3 \ 4 \ 7 \\ \hline 6 \ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \cancel{0} \\ \cancel{5} \cancel{1} 12 \\ -3 \ 4 \ 7 \\ \hline 1 \ 6 \ 5 \end{array}$$

¡Fiú!

Aquí hay otro para que pruebes, si quieres. Mi respuesta está al final del capítulo.

1. Calcula los siguientes de dos maneras: con puntos-y-casillas (y arreglando la respuesta para que la sociedad la pueda leer) y con el algoritmo tradicional. Las respuestas deberían ser las mismas.

$$\begin{array}{r} 6328 \\ - 4469 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78390231 \\ - 32495846 \\ \hline \end{array}$$

Preguntas para pensar en el camino: Al arreglar la respuesta para la sociedad, te parece más fácil des-explotar de izquierda a derecha, o de derecha a izquierda?

Pregunta adicional: ¿Crees que podrías llegar a ser tan rápido con el método de puntos-y-casillas como con el método tradicional?

De nuevo. En las matemáticas todos los métodos correctos son correctos, y cuál método de sustracción prefieres es cuestión de estilo. El algoritmo tradicional te pone a trabajar de derecha a izquierda y a hacer las des-explotaciones a medida que avanzas. El método de puntos-y-casillas te dice "¡Hazlo y ya! Y haz todas las des-explotaciones al final. Ambos métodos son correctos y están bien.



EXPLORACIONES LOCAS

He aquí algunas investigaciones de “preguntas grandes” que quizás quieras explorar, o tan solo pensar sobre ellas. ¡Diviértete!

EXPLORACION 1: ¿PODEMOS EXPLICAR LA RESPUESTA DE PUNTOS-Y-CASILLAS DE OTRA MANERA?

Cuando Sunil vió

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

escribió la siguiente línea en su papel:

$$\begin{array}{r} 200 \\ -30 \\ -5 \end{array}$$

Luego dijo que la respuesta ha de ser 165.

- ¿Puedes explicar lo que está viendo y pensando?
- ¿Qué es lo más probable que Sunil escriba en su papel para $7109 - 3384$?

EXPLORACION 2: ¿Y QUE DE LAS RESPUESTAS NEGATIVAS?

¿Cómo manejarías e interpretarías el siguiente problema de sustracción?

$$\begin{array}{r} 148 \\ - 677 \\ \hline \end{array}$$



SOLUCIONES

Como prometido, aquí están mis respuestas a los problemas planteados.

1.

$$6328 - 4469 = 2|-1|-4|-1 = 1|9|-4|-1 = 1|8|6|-1 = 1|8|5|9 = 1859$$

$$\begin{aligned} 78390231 - 32495846 &= 4|6|-1|0|-5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|9|0|-5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|8|10|-5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|8|9|5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|8|9|4|4|-1|-5 \\ &= 4|5|8|9|4|3|9|-5 \\ &= 4|5|8|9|4|3|8|5 = 45894385 \end{aligned}$$

A mí personalmente se me hace más fácil hacer las des-explosiones de izquierda a derecha.