

ТАЧКЕ КОЈЕ ЕКСПЛОДИРАЈУ ПОГЛАВЉЕ 4

ОДУЗИМАЊЕ

Хајде да наставимо с машином $1 \leftarrow 10$.

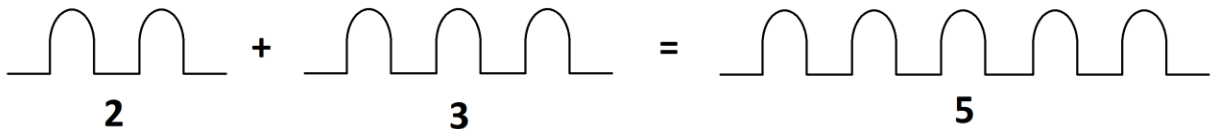
До сада смо разјаснили сабирање и множење, али смо прекочили одузимање. Зашто? Зато што за мене одузимање не постоји! За мене, одузимање је само додавање супротног.

Хајде да истражимо шта под тим подразумевам.

НЕГАТИВНИ БРОЈЕВИ

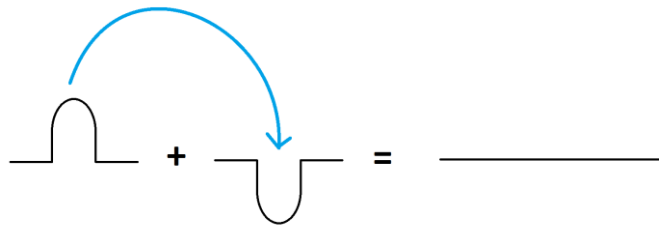
То што не верујем у одузимање, последица је још једне неистините приче. Укратко, она гласи овако.

Као дечак, често сам се играо у песку. И у песку сам открио да се позитивни цели бројеви могу представити хрпама песка: једна хрпа, две хрпе, итд. Такође сам открио сабирање позитивних бројева тако што сам једноставно ређао хрпе у низ. На пример, схватио сам да је два плус три исто што и пет тако што сам једноставно поређао хрпе на следећи начин.

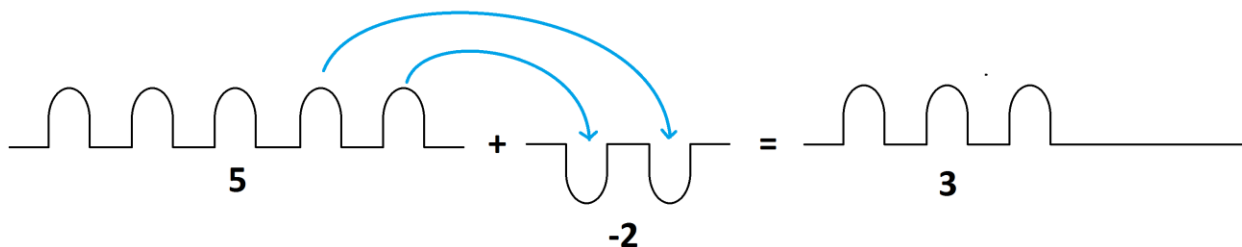


Провео сам сате забављајући се бројањем и ређањем хрпа песка у низ док сам истраживао сабирање.

Али, онда ми је једног дана синула невероватна идеја! Уместо да правим хрпе од песка, схватио сам да у песку могу да правим и рупе. И одмах сам схватио да је је рупа супротност хрпи: спојите хрпу и рупу и оне ће се поништити. Вау!



Касније сам у школи научио да се рупа зове „ -1 “, да се две рупе зову „ -2 “ итд, и да треба да радим нешто што се звало „одузимање“. Међутим, никада нисам стварно поверовао у одузимање. Моји другови би, видевши $5 - 2$, рекли „од пет одузми два“, али ја сам то посматрао као пет хрпа које се сабирају с три рупе. На слици се види да је резултат три хрпе.



Тако је. Наравно да сам добио исти резултат као моји другари: две рупе „поништавају“ две хрпе. Али, ја сам био у предности. Рецимо, моји другови би рекли да $7 - 10$ не може да се израчуна. Мени је било јасно да може.

$$\begin{aligned} 7 - 10 &= \text{седам хрпа и десет рупа} \\ &= \text{три рупе} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Мачји кашаљ!

Одузимање је само додавање супротног.

(Узгред, врло радо уместо $7 - 10$ пишем „ $7 + -10$ “. Тако је очигледније на шта мислим.)

Вратимо се сада нашим машинама с кутијама и тачкама, и то баш машини $1 \leftarrow 10$.

При раду с њом користимо тачке (на енглеском *dot*), које сам цртао као црне кругове.

● = dot

Сада нам треба појам супротности тачки, као што је рупа супротност хрпи. Нацртаћу супротност тачки као бео круг и назваћу је антитачком (на енглеском, *antidot*; узгред, *antidote* значи противотров, лек, а у српском језику такође кажемо антидот, с истим значењем).

○ = antidot

Баш као материја и антиматерија, и као 1 и -1 када причамо о хрпама и рупама које се међусобно поништавају када их спојимо, тачка и антитачка такође треба да се пониште – ПУФ! – када се нађу једна поред друге, а резултат тога је нула, тј. ништа.

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & + & \circ & = & \text{starburst} \\ \mathbf{1} & & \mathbf{-1} & & \mathbf{0} \end{array}$$

И сада можемо да изводимо основне аритметичке операције помоћу тачака и антитакача, на потпуно исти начин како смо то радили помоћу хрпа и рупа.

$$5 + -3 = 2$$

$$2 + -3 = -1$$

Успутна примедба: Узгред, има ђака који супротност тачки радије зову *акчат* (на енглеском *tod*). Можете ли да погодите зашто су смислили такав назив?

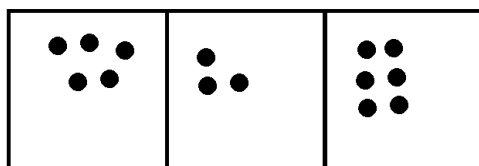
ОДУЗИМАЊЕ

Погледајте овај задатак са одузимањем.

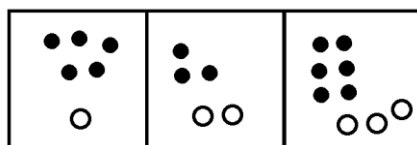
$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline \end{array}$$

По мени, овде треба израчунати колико је 536 плус број супротан броју 123.

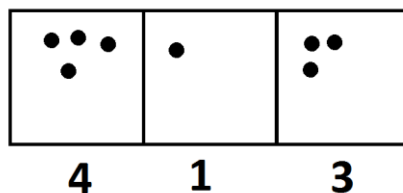
Први број, 536, изгледа овако у машини $1 \leftarrow 10$: пет тачака, три тачке, шест тачака.



Томе треба додати број супротан броју 123. Дакле, додајемо једну анти-стотину, две анти-десетке и три анти-јединице.



И сада ће се пуно тога поништити: ПУФ! ПУФ, ПУФ! ПУФ, ПУФ, ПУФ!



Видимо да ће се појавити резултат 413.

Приметите још да смо резултат добили као да смо једноставно рачунали с лева на десно и да смо говорили:

5 мање 1 је 4,

3 мање 2 је 1,

и

6 мање 3 је 3.

Тачно тако! Поново с лева на десно!

$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline 413 \end{array}$$

Да, тај пример је био превише једноставан. Шта кажете на $512 - 347$?

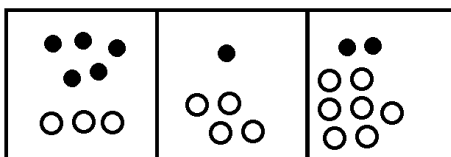
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline \end{array}$$

Ако пођемо с лева на десно, добићемо: 5 мање 3 је 2, 1 мање 4 је -3 , а 2 мање 7 је -5 . Резултат је две стотине минус три десетке и минус пет јединица.

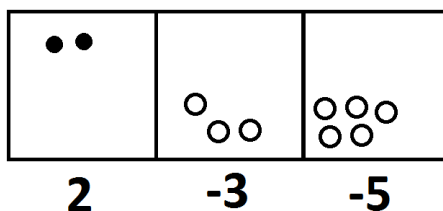
$$\begin{array}{r} 512 \\ - 347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

И тај резултат је математички апсолутно тачан! Слика показује да јесте.

Ево пет стотина, једне десетке и две јединице, заједно са три анти-стотине, четири анти-десетке и седам анти-јединица.



И после пуно поништавања остају две праве стотине, три анти-десетке и пет анти-јединица.

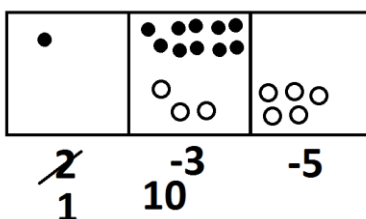


Резултат је заиста две стотине минус три десетке и минус пет јединица!

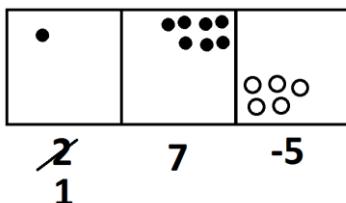
Али, наравно, ако резултат нашег задатка са одузимањем прочитамо тако, људи ће га сматрати поприлично чудним. Можемо ли да поправимо овај математички коректан резултат зарад онога на шта су људи углавном навикли?

Уз мало инспирације увиђамо да можемо да пустимо тачке да „одексплодирају“: било која тачка из кутије с леве стране морала је постати од десет тачака из кутије с њене десне стране.

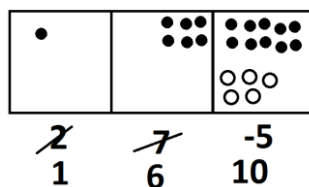
Добро. Хајде да одексплодирамо једну од две тачке које се налазе у крајњој левој кутији. Ако то урадимо, добијамо следећу слику.



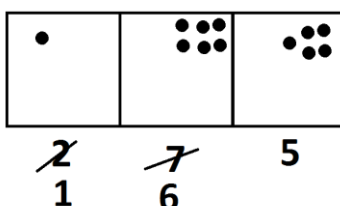
Након поништавања, примећујемо да је резултат једна стотина седамдесет минус петица. Дивно!



Хајде да поново одексплодирамо.



И након још неколико поништавања добијамо резултат који друштво може да разуме: сто шездесет иу пет.



ТРАДИЦИОНАЛНИ ПОСТУПАК

У каквом је односу овај поступак с кутијама и тачакама с традиционалним поступком?

Вратимо се задатку 512 – 347.

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Према традиционалном поступку кренућете прво с десне стране и прво ћете покушати да одредите „2 мање 7“, што не можете.

(Уствари можете, резултат је -5 , али то не смете да напишете када користите овај поступак.)

Па, шта ћете урадити?

„Позајмићете један“. Другим речима, узећете тачку из колоне у којој се налазе десетке и одексплодирати је да бисте добили десет јединица. Тако у колони с десеткама остаје 0 тачака. Требало би да допишемо десет јединица уз двојку која се налази у колони с јединицама.

$$\begin{array}{r} 0 \text{ } 10 \\ 5\cancel{1}2 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Али, пошто смо мудри, уместо $10 + 2$, пишемо само 12. (Односно, дописујемо 1 испред 2 да бисмо добили дванаест.)

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5\cancel{1}12 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Затим кажемо „дванаест мање седам је пет“ и ту петицу пишемо у колони јединица испод црте.

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5\cancel{1}12 \\ -347 \\ \hline 5 \end{array}$$

Крајња десна колона је готова. Затим прелазимо на средњу колону.

Ту сада треба да се „нула умањи за четири“, што се не може урадити. Зато поново изазивамо одексплозију, тј, поново „позајмљујемо“, да би се у тој колони појавило $10 - 4$. Пишемо резултат 6.

Затим прелазимо на последњу преосталу колону у којој стоји $4 - 3$, а то је 1.

$$\begin{array}{r} 4^1 0 \\ \cancel{5} 1^1 2 \\ - 3 4 7 \\ \hline 6 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4^1 0 \\ \cancel{5} 1^1 2 \\ - 3 4 7 \\ \hline 1 6 5 \end{array}$$

Ух!

Ево једног питања, па ако вам се одговара, одговорите. Мој одговор се налази на крају овог поглавља.

1. Израчунајте сваки од следећих задатака на два начина: уз помоћ тачака и кутија (поправљајући резултат како би људи могли да га прочитају) и онда користећи традиционални поступак. Резултати би требало да буду исти.

$$\begin{array}{r} 6328 \\ - 4469 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78390231 \\ - 32495846 \\ \hline \end{array}$$

Питање за размишљање успут: Док коригујете резултате зарад људи, да ли вам се чини лакше да одексплозије вршите с лева на десно или с десна на лево?

Додатно питање: Да ли вам се чини да бисте уз помоћ тачака и кутија могли да рачунате једнако брзо као када користите традиционални поступак?

И понављам: сви исправни приступи математици су исправни, и само је питање стила који приступ вам се највише свиђа да га користите за одузимање. Традиционални поступак захтева да идете с десне стране на леву, и да успут извршите све одексплозије. Помоћу поступка са тачкама и кутијама можете све одмах да рачунате и онда још на крају обавите потребна одексплодирања. Оба метода су добра и исправна.



ФАНТАСТИЧНА ИСТРАЖИВАЊА

Следи неколико истраживања „важних питања“ на која ћете можда покушати да одговорите, или макар да размислите о њима. Уживајте!

ИСТРАЖИВАЊЕ 1: ДА ЛИ ПОСТОЈИ НЕКИ ДРУГИ НАЧИН ЗА ТУМАЧЕЊЕ РЕЗУЛТАТА ДОБИЈЕНИХ ПОМОЋУ ТАЧАКА И КУТИЈА?

Када је Стеван видео

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

написао је на свом папиру следеће:

$$\begin{array}{r} 200 \\ -30 \\ -5 \end{array}$$

Затим је рекао да резултат мора да буде 165.

- a) Можете ли да објасните шта је видео и на који је начин размишљао?
- b) Шта би Стеван највероватније написао да израчуна $7109 - 3384$?

ИСТРАЖИВАЊЕ 2: ШТА РАДИТИ С НЕГАТИВНИМ РЕЗУЛТАТИМА?

Како бисте могли да израчунате и растумачите следећи задатак?

$$\begin{array}{r} 148 \\ - 677 \\ \hline \end{array}$$



РЕШЕЊА

Као што сам и обећао, у наставку су моји одговори на постављена питања.

1.

$$6328 - 4469 = 2|-1| - 4|-1| = 1|9|-4| - 1 = 1|8|6|-1 = 1|8|5|9 = 1859$$

$$78390231 - 32495846 = 4|6| - 1|0| - 5|-6| - 1| - 5$$

$$= 4|5|9|0| - 5|-6| - 1| - 5$$

$$= 4|5|8|10| - 5|-6| - 1| - 5$$

$$= 4|5|8|9|5|-6| - 1| - 5$$

$$= 4|5|8|9|4|4| - 1| - 5$$

$$= 4|5|8|9|4|3|9| - 5$$

$$= 4|5|8|9|4|3|8|5 = 45894385$$

Мени је лично много лакше да одексплозије вршим с лева на десно.