

## ЕКСПЛОДИРАЩИ ТОЧКИ

### ГЛАВА 4

## ИЗВАЖДАНЕ

Нека продължим да се занимаваме с  $1 \leftarrow 10$  машината.

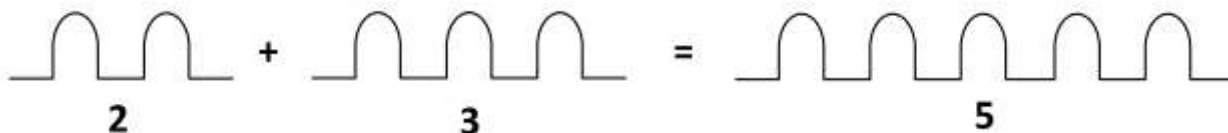
До този момент ние успяхме да разберем събирането и умножението. Но пропуснахме изваждането. Защо? Защото аз не вярвам в изваждането! За мен изваждането е просто събиране с противоположното.

Нека видим какво точно имам в предвид.

### ОТРИЦАТЕЛНИ ЧИСЛА

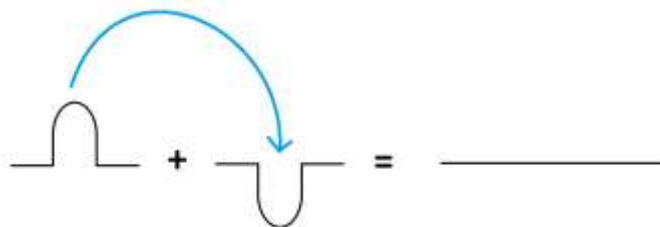
Моята липса на вяра в изваждането произлиза от една друга история, която не е вярна. Ето каква е тя накратко.

Като малко дете, аз обичах да си играя в пясъчника. Там аз си представях положителните числа за броене като купчинки пясък: една купчинка, две купчинки и т.н. Освен това, аз открих още събирането на положителни числа просто като подреждах купчинките по права линия. Например, аз видях, че две плюс три прави пет просто като подредих купчинките по следния начин.

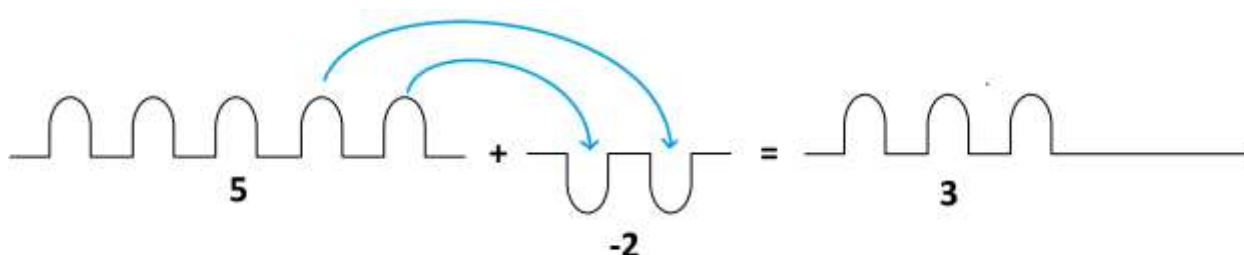


Прекарах часове забавлявайки се докато броях и подреждах купчинки за да изследвам събирането.

Но един ден, аз получих поразително прозрение! Вместо да правя купчинки пясък, аз осъзнах, че вместо това мога да правя дупки. Веднага ми стана ясно, че една дупка е противоположна на една купчинка: ако се опитам да събера заедно една купчинка и една дупка, те се унищожават взаимно. Уау!



По-късно в училище ми беше казвано да наричам една дупка “-1”, две дупки “-2,” и т.н. и също така ми казваха да правя онова нещо, наречено “изваждане.” Но аз всъщност никога не съм вярвал в изваждането. Съучениците ми четяха  $5 - 2$ , като “пет минус две,” но аз си мислех за пет купчинки, които събирам с две дупки. Картичката показва, че отговорът е три купчинки.



Да. Аз получавам същия отговор като приятелите ми, разбира се: двете дупки “отнеха” две от купчинките. Но аз имах предимство. Например, съучениците ми биха казали, че  $7 - 10$  няма отговор. Аз видях, че има.

$$\begin{aligned} 7 - 10 &= \text{седем купчинки и десет дупки} \\ &= \text{три дупки} \\ &= -3 \end{aligned}$$

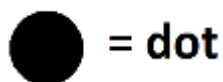
Лесно!

Изваждането е същото като събиране с противоположното.


(Между другото, аз предпочитам да пише  $7 - 10$  като “ $7 + -10$ .” Това ми помага да мисля по-лесно.)

Нека се върнем към нашите машини с точки и кутии, в частност към  $1 \leftarrow 10$  машината.

Там ние работихме с точки, които аз рисувах като пълни точки по следния начин.



Сега ние се нуждаем от нещо, което да е противоположно на точката, както една дупка е противоположна на една купчинка. Ще рисувам противоположното нещо на една точка като празно кръгче и ще я наричам антиточка.

 = antidot

Също както материя и антиматерия и както  $1$  и  $-1$ , изобразено като купчинки и дупки, които се унищожават взаимно, когато се съберат заедно, една точка и една антиточка трябва също да се унищожават взаимно – ПУФФ! – когато ги съберем заедно нищо не остава след тях.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bullet & + & \circ & = & \text{burst} \\
 1 & & -1 & & 0
 \end{array}$$

А сега ние можем да извършваме прости аритметични действия с точки и антиточки, също както направихме с купчинките и дупките.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \circ \circ \end{array} & = & \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \end{array} \\
 5 + -3 & = & 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bullet \circ \circ \\ \circ \bullet \bullet \end{array} & = & \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \\
 2 + -3 & = & -1
 \end{array}$$

**Между другото:** Някои ученици предпочитат да наричат обратното на точка - *акчот*. Можете ли да познаете откъде произлиза това име?

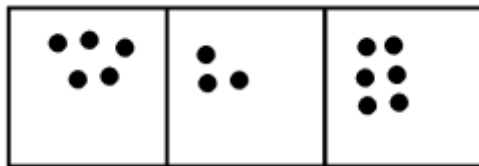
## ИЗВАЖДАНЕ

Погледнете следната задача за изваждане.

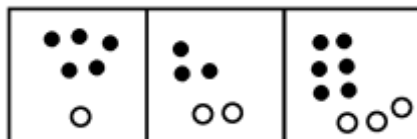
$$\begin{array}{r}
 536 \\
 - 123 \\
 \hline
 \end{array}$$

За мен това е  $536$  плюс противоположното на  $123$ .

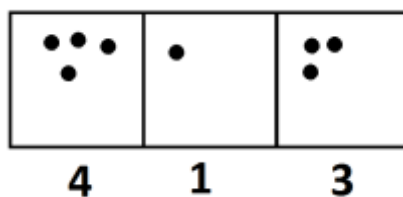
Първото число,  $536$ , изглежда по следния начин в една  $1 \leftarrow 10$  машина: пет точки, три точки, шест точки.



Към това ние прибавяме обратното на  $123$ . Тоест, прибавяме една анти-стотица, две анти-десетици, и три анти-единици.



А сега точките и антиточките започват да се унищожават взаимно.: ПУУФ!; ПУФ ПУФ!; ПУФФ ПУФФ ПУФФ!



Виждаме как отговорът  $413$  се появява пред очите ни.

Забележете, че получихме този отговор като че ли работихме от ляво надясно и казвахме

5 минус 1 прави 4,  
3 минус 2 прави 1,  
и  
6 минус 3 прави 3.

Да! Отново от ляво надясно!

$$\begin{array}{r} 536 \\ - 123 \\ \hline 413 \end{array}$$

Добре. Този пример беше твърде приятен. А какво ще кажете за  $512 - 347$ ?

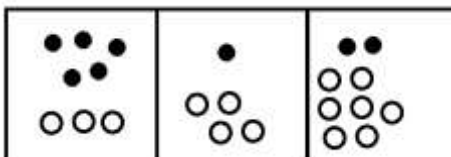
$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Вървейки от ляво надясно, получаваме: 5 минус 3 прави 2, 1 минус 4 прави -3 и 2 минус 7 прави -5. Отговорът е двеста минус-тридесет и минус-пет.

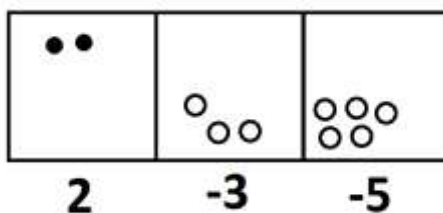
$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

И този отговор е абсолютно верен математически! Картичката го доказва.

Ето пет стотици, една десетица и две единици, заедно с три анти-стотици, четири анти-десетици и седем анти-единици.



И след много взаимни унищожавания виждаме, че са останали две стотици, три анти-десетици и пет анти-единици.

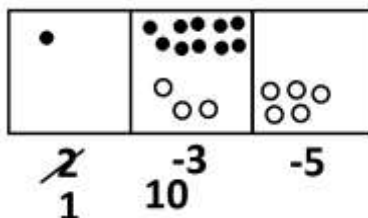


Така че отговорът наистина е двеста минус-тридесет и минус-пет!

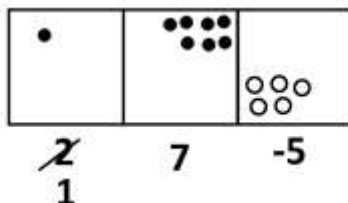
Но, разбира се, този начин на изговаряне на отговора ще се стори много странен на обществото. Можем ли да поправим този математически верен отговор, така че обществото да е доволно?

След момент на вдъхновение, ние осъзнаваме, че можем да “отексплодираме” точки: една точка в кутия вляво е трябвало да дойде от десет точки в кутия вдясно на нея.

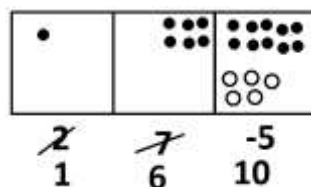
Супер. Нека отексплодираме една от двете точки, които имаме в най-лявата кутия. Това дава следната картинка.



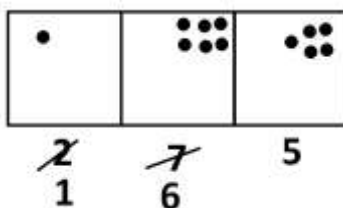
След взаимните унищожения, виждаме, че сега отговорът е сто седемдесет и минус-пет. Красота!



Нека отексплодираме отново.



След още няколко взаимни унищожения, видаме отговор, който обществото може да разбере: сто шестдесет и пет.



## ТРАДИЦИОННИЯТ АЛГОРИТЪМ

Можем ли да сравним този подход за изваждане чрез точки и кутии със стандартният алгоритъм?

Вижте отново 512 – 347.

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline \end{array}$$

Стандартният алгоритъм ни кара да започнем от дясно наляво и първо да се опитаме да извършим “2 минус 7,” което не можем да направим.

(Е, всъщност можем, отговорът е  $-5$ , но вие не трябва да пишете това докато извършвате този алгоритъм.)

Така че какво правите?

“Заемаме едно.” Тоест, взимате една точка от колонката на десетиците и я отексплодирате за да получите десет единици. Това оставя нула точки в колонката на десетиците. Ние трябва да напишем, че десет единици са заедно с другите две в колонката на единиците.

$$\begin{array}{r} 0 \text{ } 10 \\ 5 \text{ } \cancel{1} \text{ } 2 \\ -3 \text{ } 4 \text{ } 7 \\ \hline \end{array}$$

Но ние се изхитряме малко и просто пишем 12 вместо  $10 + 2$ . (Тоест, ние слагаме 1 пред 2 за да изглежда като дванадесет.)

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5 \text{ } \cancel{1} \text{ } 12 \\ -3 \text{ } 4 \text{ } 7 \\ \hline \end{array}$$

Тогава казваме, че “дванадесет минус седем прави пет” и записваме този отговор.

$$\begin{array}{r} 0 \\ 5 \text{ } \cancel{1} \text{ } 12 \\ -3 \text{ } 4 \text{ } 7 \\ \hline 5 \end{array}$$

Готови сме с най-дясната колона. Сега отместваме вниманието си към средната.

Виждаме, че трябва да извършим “нула минус четири,” което не можем да направим. Така че правим още едно отексплодиране, тоест, още едно “заемане,” и виждаме  $10 - 4$  в тази колона. Ние пишем отговора 6.

След това отместваме вниманието си към последната оставаща колона, където имаме  $4 - 3$ , което е 1.

$$\begin{array}{r} 40 \\ \cancel{51}^{\frac{1}{2}} \\ -347 \\ \hline 65 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \cancel{51}^{\frac{1}{2}} \\ -347 \\ \hline 165 \end{array}$$

Пфуу!

Ето една задача за упражнение, която можете да опитате да решите ако искате. Моят отговор на задачата ще намерите в края на главата.

1. Сметнете всяка от следните задачи по два начина: чрез точки и кутии (и с поправка на отговора, така че обществото да може да го прочете) и също чрез традиционния алгоритъм. Отговорите трябва да съвпадат.

$$\begin{array}{r} 6328 \\ -4469 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78390231 \\ -32495846 \\ \hline \end{array}$$

**Въпрос, по който да си мислите докато решавате:** Докато поправяте отговора за обществото, как изглежда по-лесно - да експлодирате от ляво надясно или от дясно наляво?

**Допълнителен въпрос:** Мислите ли, че с точки и кутии можете да се научите да смятате също толкова бързо, колкото можете с традиционния алгоритъм?

Казвам отново. Всички правилни подходи в математиката са вярни и е единствено въпрос на стил кой подход за изваждане ще предпочетете. Традиционният алгоритъм ви кара да работите от дясно наляво и да извършвате експлозиите когато се наложи. Подходът с точки и кутии предразполага просто да извършите изваждането и да оставите всичките отексплозии за накрая. И двата метода са добри и правилни.





## ЗА ЩУРИ ИЗСЛЕДОВАТЕЛИ

Ето няколко “големи въпроса” за изследване, с които може да решите да се захванете, или поне да помислите по тях. Приятно забавление!

### ОБЕКТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ 1: ИМА ЛИ ДРУГ НАЧИН, ПО КОЙТО МОЖЕМ ДА ИНТЕРПРЕТИРАМЕ ОТГОВОРА, КОЙТО ИЗЛИЗА ОТ ТОЧКИТЕ И КУТИИТЕ?

Когато Сънил видял

$$\begin{array}{r} 512 \\ -347 \\ \hline 2|-3|-5 \end{array}$$

той написал на лист хартия следното:

$$\begin{array}{r} 200 \\ -30 \\ -5 \end{array}$$

Теогава той казал, че отговорът трябва да бъде <sup>165</sup>.

- Можете ли да си обясните какво той си мисли и вижда?
- Какво би написал Сънил, когато види  $7109 - 3384$ ?

### ОБЕКТ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ 2: КАКВО ДА ПРАВИМ С ОТРИЦАТЕЛНИ ОТГОВОРИ?

Как бихте интерпретирали и решили следната задача за изваждане?

$$\begin{array}{r} 148 \\ - 677 \\ \hline \end{array}$$





## РЕШЕНИЯ

Както ви обещах, тук е решението на въпроса от преди малко.

1.

$$6328 - 4469 = 2|-1|-4|-1 = 1|9|-4|-1 = 1|8|6|-1 = 1|8|5|9 = 1859$$

$$\begin{aligned} 78390231 - 32495846 &= 4|6|-1|0|-5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|9|0|-5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|8|10|-5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|8|9|5|-6|-1|-5 \\ &= 4|5|8|9|4|4|-1|-5 \\ &= 4|5|8|9|4|3|9|-5 \\ &= 4|5|8|9|4|3|8|5 = 45894385 \end{aligned}$$

Аз лично предпочитам да извършвам отексплозиите от ляво надясно.