

## ТАЧКЕ КОЈЕ ЕКСПЛОДИРАЈУ ПОГЛАВЉЕ 3

### САБИРАЊЕ И МНОЖЕЊЕ

Људи обожавају да рачунају користећи основу десет. Зато, хајде да се мало позабавимо машином  $1 \leftarrow 10$ , и да у потпуности схватимо смисао све оне аритметике коју обично учимо у школи.

Управо смо научили како се пишу бројеви. Следеће што ђаци обично науче је како да сабирају бројеве.

Хајде да прво размотримо сабирање, па да онда наставимо даље.

### САБИРАЊЕ

Ево једног задатка са сабирањем: израчунати  $251 + 124$ . Такав задатак се обично записује на следећи начин:

$$\begin{array}{r} 251 \\ + 124 \\ \hline \end{array}$$

Овај задатак је лако урадити:  $2 + 1$  је 3,  $5 + 2$  је 7, а  $1 + 4$  је 5. Добијамо збир 375.

$$\begin{array}{r} 251 \\ + 124 \\ \hline 375 \end{array}$$

Али, да ли сте приметили нешто чудно? Сабирао сам с лева на десно, управо онако како су ме учили да читам. То је обично супротно од онога што већина научи на часовима математике: сабирај с десна на лево. Без обзира што смо ишли супротним смером, резултат 375 који смо тако добили је тачан. (Проверите: да ли добијате исти збир ако сабирате бројеве са супротне стране?)

Па зашто нас онда на часовима математике уче да сабирамо с десна на лево?

Многи ће имати примедбу да је задатак који смо управо урадили „превише лак“, и предложиће да урадимо незгоднији задатак са сабирањем, попут  $358 + 287$ .

$$\begin{array}{r} 358 \\ + 287 \\ \hline \end{array}$$

ОК. Хајде да га урадимо!

Ако поново сабирамо с лева на десно, добићемо да је  $3 + 2$  једнако 5;  $5 + 8$  је 13, а  $8 + 7$  је 15. Добијамо резултат „пет стотина тринаест десетки петнаест“, или на енглеском „five-hundred thirteenty fifteen“. (Сетите се да је суфикс “-ty” скраћеница за број 10).

$$\begin{array}{r} 358 \\ + 287 \\ \hline 5 | 13 | 15 \end{array}$$

А овај резултат је математички апсолутно тачан! Можете га проверити помоћу машине  $1 \leftarrow 10$ . Убаците у њу бројеве 358 и 287.

<b>358</b>	••	•••	••••
<b>+ 287</b>	••	••••	•••••
<b>=</b>	•••	••••••	•••••••
<b>5   13   15</b>			

Сабирање 3 стотине са 2 стотине заиста даје 5 стотина.

Сабирање 5 десетки (десетица) и 8 десетки (десетица) заиста даје 13 десетки (десетица).

Сабирање 8 јединица и 7 јединица заиста даје 15 јединица.

„Пет стотина тринаест десетки петнаест“ је потпуно исправан резултат, а чак сам га исправно и записао речима. Заиста се добија 5 стотина, 13 десетки и 15 јединица. Нема ничег лошег у том одговору са математичке тачке гледишта. Он само звучи чудно. Људи више воле када се бројеви не говоре тако.

Зато се сада поставља питање:

*Можемо ли овај одговор некако преформулисати, не зарад математике, већ баш зарад људи?*

Одговор је потврдан! Можемо да изазовемо експлозије. (На крају крајева, ово је ипак машина  $1 \leftarrow 10$ .)

Хајде да пустимо десет тачака из средње кутије да експлодирају, и да их заменимо једном тачком која ће се појавити у првој следећој кутији са леве стране.

$$\begin{array}{r}
 358 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 + 287 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 = \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \quad \quad \quad \cancel{5} \mid \cancel{13} \mid 15 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6 \quad 3
 \end{array}$$

Сада добијамо резултат „шест стотина три десетке петнаест“. То је и даље диван, математички тачан резултат. Али, људи се у великој мери можда и неће сложити. Хајде да поново направимо експлозију, овог пута бирамо десет тачака у крајњој десној кутији.

$$\begin{array}{r}
 358 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 + 287 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 = \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \end{array} \\
 \quad \quad \quad \cancel{5} \mid \cancel{13} \mid \cancel{15} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6 \quad \cancel{3} \quad 5 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 4
 \end{array}$$

Сада видимо да је резултат „шест стотина четири десетке пет“, а њега људи разумеју. (на енглеском би то било „six hundred four-ty five“, иако се „four-ty“ обично пише *forty*.)

Ево неколико задатака за вежбање које ћете можда покушати да урадите. Моја решења ћете наћи на крају поглавља.

1. Решите следеће задатке, сабирајући бројеве с лева на десно и не брините о томе шта би људи рекли за резултате! Затим примените експлозије како бисте сваки резултат превели у број који људи разумеју.

$$\begin{array}{r}
 148 \\
 + 323 \\
 \hline
 =
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 567 \\
 + 271 \\
 \hline
 =
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 377 \\
 + 188 \\
 \hline
 =
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 582 \\
 + 714 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 310462872 \\
 + 389107123 \\
 \hline
 =
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 87263716381 \\
 + 18778274824 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

## ТРАДИЦИОНАЛНИ ПОСТУПАК

У каквом је односу овај приступ сабирању помоћу тачака и кутија са стандардним поступком који је познат већини?

Вратимо се примеру  $358 + 287$ . Већина људи је изненађена (можда чак и узнемирена) резултатом  $5|13|15$  који се једноставно добија сабирањем с лева на десно.

$$\begin{array}{r} 358 \\ + 287 \\ \hline 5|13|15 \end{array}$$

То се дешава зато што нас традиционални поступак води да сабирамо с десна на лево, па прво посматрамо збир  $8 + 7$ .

358	••	•••	••••
+ 287	••	••••	•••••
=			
			••••• •••••

Али у поступку не пишемо резултат 15. Уместо тога, одмах пустимо десет тачака да експлодирају и пишемо на папиру 5 испод црте, а малу јединицу дописујемо изнад средње колоне. То се обично назива *преношењем јединице*, и у потпуности одговара додавању једне тачке на место десетки/десетица.

358	••	•••	••••
+ 287	••	••••	•••••
=			
			••••• •••••
		•	••••

$$\begin{array}{r} 1 \\ 358 \\ + 287 \\ \hline 5 \end{array}$$

Сада ћемо се позабавити кутијама у средини. Сабирањем добијамо 14 тачака у кутији у којој тачке имају вредност десет ( $5 + 8$  даје тринаест тачака, плус једна додатна тачка из претходне експлозије).

$$\begin{array}{r}
 358 \\
 + 287 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

Поново пустимо десет тачака да експлодирају.

$$\begin{array}{r}
 358 \\
 + 287 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

На папиру пишемо четворку на позицији десетица испод подвучене линије, а нову малу јединицу дописујемо изнад следеће колоне с леве стране. То се у потпуности поклапа са идејом приказаном на слици са тачкама и кутијама.

И на крају, завршавамо рачунање сабирајући тачке на позицији стотина.

$$\begin{array}{r}
 358 \\
 + 287 \\
 \hline
 =
 \end{array}$$

Дакле, традиционални поступак иде с десне стране на леву, и успут пушта тачке да експлодирају (односно „преноси“). На папиру, тај поступак је брз и компактан, па је то можда и разлог зашто је већ вековима омиљени начин сабирања.

Поступак који користи тачке које експлодирају иде с леве стране на десну, управо онако како нас уче да читамо, и оставља све експлозије за крај. Лако га је разумети и у неку руку је забаван.

Оба поступка су, наравно, добра и исправна. Само је питање укуса и личног стила који ћете од њих изабрати да користите. (И слободно измислите и ви свој сопствени, нов и исправан поступак!)

## МНОЖЕЊЕ

Наставићемо да се играмо са машином  $1 \leftarrow 10$ . И хајде да одмах урадимо један задатак са множењем!

Имате на располагању мање од три секунде да запишете један апсолутно тачан, брзи одговор на овај задатак са множењем. Како гласи добар одговор?

$$26417 \times 3$$

Можете ли да видите да је  $6|18|12|3|21$ , односно, „шест десет хиљада, осамнаест хиљада, дванаест стотина, три десетке и двадесет један“ (на енглеском „six ten thousand, eighteen thousand, twelve hundred and threety twenty-one“) тачан резултат који се може добити за задато време?

Ево шта се у ствари ту дешава.

Почећемо сликом броја 26417 у машини  $1 \leftarrow 10$ . (Да ли је у реду ако, уместо да нацртам тачке, само напишем бројеве?)

2	6	4	1	7
---	---	---	---	---

Добили смо задатак да утростручимо тај број.

2	6	4	1	7	$\times 3$
---	---	---	---	---	------------

На почетку има 2 пута по десет хиљада. Уколико их утростручимо, биће их 6.

Хиљада има 6, а утростручавањем ће их бити 18.

Поред тога, 4 стотине постаће 12 стотина, 1 десетка ће дати 3, а 7 јединица ће постати 21 јединица.

6	18	12	3	21
---	----	----	---	----

Видимо да је резултат „шездесет осамнаест хиљада, дванаест стотина, три десетке и двадесет један“ (на енглеском „sixty eighteen thousand, twelve hundred and threety twenty-one“). Апсолутно поуздано и математички исправно!

Сад, како да овај резултат преформулишемо зарад људи?

Тако што ћемо пустити тачке да експлодирају, наравно!

Изгледа да експлозије могу да се одигравају којим год редоследом нам се свици. Можете ли да пратите овај низ промена?

$$6|18|12|3|21 = 6|19|2|3|21 = 6|19|2|5|1 = 7|9|2|5|1$$

Добијамо резултат 79251.

**2.** Израчунајте следеће производе:  $26417 \cdot 4$ ,  $26417 \cdot 5$  и  $26417 \cdot 9$ .

Израчунајте производ  $26417 \cdot 10$ , и објасните зашто резултат мора да буде 264170. (Подсећа на полазни број, али има цифру нула дописану на самом крају.)

**Додатак:** Да ли бисте хтели да израчунате и производе  $26417 \cdot 11$  и  $26417 \cdot 12$ ? (Одговор може да буде и „Не! Баш ми и није до тога!“)

## МНОЖЕЊЕ СА ДЕСЕТ

Хајде да уствари одговоримо на једно од питања која су остала за вежбу. *Зашто резултат множења  $26417 \cdot 10$  мора да личи на полазни број коме је дописана нула на крају?*

Сећам се да су ме у школи учили следеће правило: да бисте помножили број са десет, допишите му нулу с десне стране. На пример,

$$37 \cdot 10 = 370$$

$$98989 \cdot 10 = 989890$$

$$100000 \cdot 10 = 1000000$$

итд.

То запажање потпуно одговара размишљању које користи тачке и кутије.

Ево поново броја 26417 приказаног у машини  $1 \leftarrow 10$ .

2	6	4	1	7
---	---	---	---	---

Ево производа  $26417 \cdot 10$ .

20	60	40	10	70
----	----	----	----	----

Хајде да сада пустимо тачке да експлодирају, кутију по кутију. (Биће нам потребна једна нова кутија с леве стране.)

Две групе од по десет тачака ће експлодирати и дати 2 тачке у новој кутији с леве стране, па ће 6 група од по десет тачака после експлозије дати 6 тачака у суседној кутији с леве стране, затим ће 4 групе од десет тачака после експлозије дати 4 тачке у суседној кутији с леве стране, итд. Цифре са

којима радимо се не мењају. Штавише, крајњи ефекат је да се све цифре помере за једно место у лево, остављајући нула тачака у кутији са јединицама.

	<del>20</del>	60	40	10	70
2	0	<del>60</del>	40	10	70
2	6	0	<del>40</del>	10	70
2	6	4	0	<del>10</del>	70
2	6	4	1	0	<del>70</del>
2	6	4	1	7	0

Заиста изгледа као да смо дописали нулу с десне стране броја 26417. (Али, то смо у ствари урадили на основу читавог низа експлозија.)

3. а) Шта мора да буде резултат множења  $476 \cdot 10$ ? А множења  $476 \cdot 100$ ?  
 б) Шта је резултат дељења  $9190 : 10$ ? А дељења  $3310000 : 100$ ?



## НЕОБАВЕЗНО: ПИСМЕНО МНОЖЕЊЕ

Да ли је могуће израчунати, рецимо,  $37 \cdot 23$ , користећи тачке и кутије?

Сада се од нас тражи да помножимо три десетке са 23 и седам јединица са 23. Ако добро стојите са умношцима броја 23, множењем морате да добијете  $3 \cdot 23 = 69$  десетки и  $7 \cdot 23 = 161$  јединицу. Због тога је резултат  $69|161$ , а уз помоћ експлозија добија се 851.

Али овакав приступ делује прилично тешко! Он тражи да знате умношке броја 23.

### Задатак за размишљање:

Сузана је мало размишљала о производу  $37 \cdot 23$ , па је на крају нацртала следећу слику.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 14 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 9 & 21 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 23 & 21 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Затим је рекла да је  $37 \cdot 23 = 6|23|21 = 8|3|21 = 851$ .

- Можете ли да реконструишете њено размишљање?
- Шта мислите, какву би слику Сузана нацртала за производ  $236 \cdot 34$  (и који би резултат добила користећи је)?
- Ако се користи Сузанин приступ, да ли производи  $37 \cdot 23$  и  $23 \cdot 37$  дају исти резултат? Да ли вам, док радите задатак, постаје јасно да ће резултат бити исти? Да ли производи  $236 \cdot 34$  и  $34 \cdot 236$  дају исти резултат ако се за израчунавање користи Сузанин приступ?

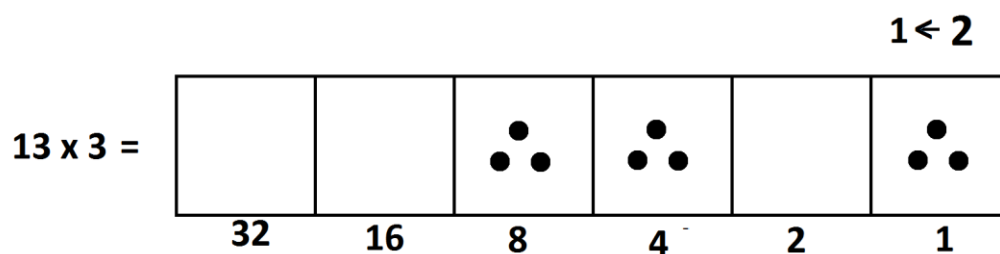
Ево још једног забавног начина да се размишља о множењу. Овог пута ћемо за објашњење користити машину  $1 \leftarrow 2$ .

Хајде да израчунамо производ  $13 \cdot 3$ .

Ево како изгледа број 13 у машини  $1 \leftarrow 2$ .

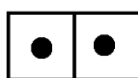
$$\begin{array}{r}
 13 = \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & \bullet & \bullet & & \bullet \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{cccccc}
 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1
 \end{array}
 \end{array}
 \quad 1 \leftarrow 2$$

Од нас се тражи да га утростручимо. Дакле, свака тачка коју видимо треба да се замени са три тачке.

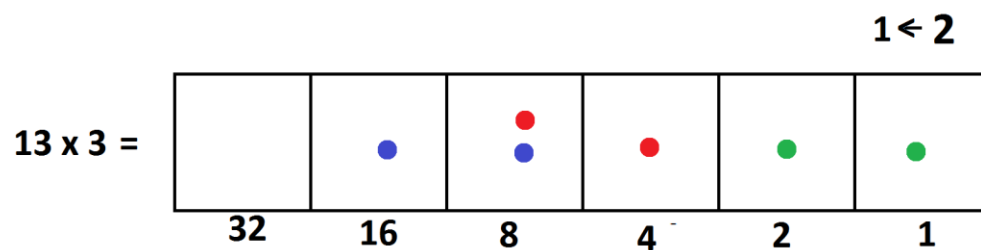
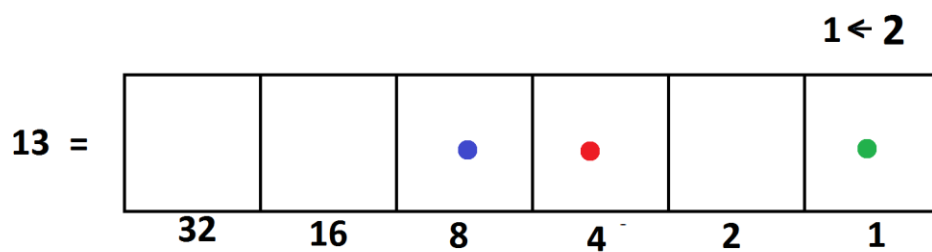


И сад можемо да пустимо тачке да експлодирају, па да видимо да ће се појавити резултат 39. (тај број у машини  $1 \leftarrow 2$  има шифру 100111).

Друга могућност је да приметимо да три тачке у машини  $1 \leftarrow 2$  у ствари изгледају овако:



Зато можемо сваку тачку на нашој слици броја 13 да заменимо с једном тачком и још једном коју ћемо додати у прву кутију с леве стране у односу на постојећу тачку. (Додао сам и боје на слику да нам буде лакше.)



Сада када нам је преостало мање тачака које могу да експлодирају, видимо да се појављује резултат 100111.



## ФАНТАСТИЧНА ИСТРАЖИВАЊА

Следи неколико истраживања о „важним питањима“ на која ћете можда покушати да одговорите, или макар да размислите о њима. Уживајте!

### ИСТРАЖИВАЊЕ 1: НЕМА НИЧЕГ ПОСЕБНОГ У КОРИШТЕЊУ ОСНОВЕ ДЕСЕТ ЗА САБИРАЊЕ

Ево једног задатка са сабирањем у машини  $1 \leftarrow 5$ . (Дакле у питању је задатак у основи пет.) Имајте у виду да ово није сабирање у машини  $1 \leftarrow 10$ .

$$\begin{array}{r} 20413 \\ + 13244 \\ \hline \end{array}$$

- Шта је одговор у машини  $1 \leftarrow 5$ ?
- Који број има шифру 20413 у машини  $1 \leftarrow 5$ ? А који број има шифру 13244 у истој машини? Колики је збир та два броја и шта је његова шифра у машини  $1 \leftarrow 5$ ?

[Како бисте могли да проверите своје паметно размишљање, ево одговора.

Рачунајући збир у машини  $1 \leftarrow 5$ , добијамо:

$$20413 + 13244 = 3|3|6|5|7 = 3|4|1|5|7 = 3|4|2|0|7 = 3|4|2|1|2 = 34212.$$

У машини  $1 \leftarrow 5$  број 20413 је збир две 625, четири 25, једне петице и три јединице, а то је број 1358 записан у основи десет; слично је 13244 број 1074 у основи десет, а 34212 је број 2432 у основи десет. Управо смо добили да је  $1358 + 1074 = 2432$ .]

### ИСТРАЖИВАЊЕ 2: НЕМА НИЧЕГ ПОСЕБНОГ У КОРИШТЕЊУ ОСНОВЕ ДЕСЕТ ЗА МНОЖЕЊЕ

Хајде да користимо машину  $1 \leftarrow 3$ .

- Одредите колико је  $113 \cdot 3$  у систему са основом три. А колико је  $1202 \cdot 3$  и  $2002 \cdot 3$ ? Можете ли да објасните шта примећујете?

Пређимо сада на машину  $1 \leftarrow 4$ .

- Колико је  $133 \cdot 4$  у систему са основом четири? Колико је  $2011 \cdot 4$ ? А колико је  $22 \cdot 4$ ? Можете ли да објасните шта примећујете?

У општем случају, ако користимо машину  $1 \leftarrow b$ , можете ли да објасните зашто множење неког броја бројем  $b$  у основи  $b$  даје за резултат полазни број коме је са десне стране дописана нула?



## РЕШЕЊА

Као што сам и обећао, ево мојих одговора на постављена питања.

1.

$$148 + 323 = 4|6|11 = 471$$

$$567 + 271 = 7|13|8 = 838$$

$$377 + 188 = 4|15|15 = 5|5|15 = 565$$

$$582 + 714 = 12|9|6 = 1|2|9|6 = 1296$$

$$310462872 + 389107123 = 6|9|9|5|6|9|9|9|5 = 699569995$$

$$87263716381 + 18778274824 = 9|15|9|13|11|9|8|10|11|10|5 = \dots = 106041991205$$

2.

Биће:

$$26417 \cdot 4 = 8|24|16|4|28 = 10|4|16|4|28 = 1|0|4|16|4|28 = 1|0|5|6|4|28 = 105668$$

$$26417 \cdot 5 = 10|30|20|5|35 = 10|30|20|8|5 = 10|32|0|8|5 = 13|2|0|8|5 = 132085$$

$$26417 \cdot 9 = 18|54|36|9|63 = 18|54|36|15|3 = \dots = 237753$$

$$26417 \cdot 11 = 22|66|44|11|77 = \dots = 290587$$

$$26417 \cdot 12 = 24|72|48|12|84 = \dots = 317004$$

Наставите са читањем поглавља како бисте открили зашто производ  $26417 \cdot 10$  има вредност 264170.

3.

а)  $476 \cdot 10$  је 4760. Пошто је  $476 \cdot 100$  исто што и „476 пута десет пута десет“, резултат ће бити 47600.

б) Знамо да је 9190 резултат множења  $919 \cdot 10$ . Према томе,  $9190:10$  мора бити 919.

Слично, како је 3310000 вредност производа  $33100 \cdot 100$ , количник  $3310000:100$  мора имати вредност 33100.