

ТАЧКЕ КОЈЕ ЕКСПЛОДИРАЈУ

ПОГЛАВЉЕ 1

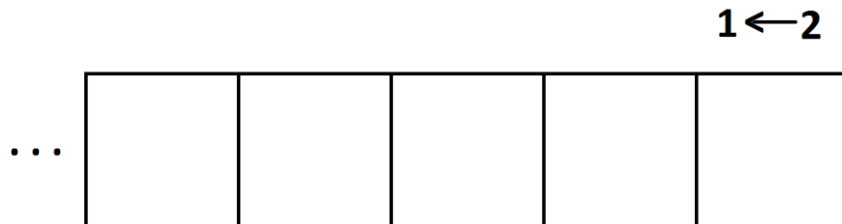
МАШИНЕ

Добро дошли на наше заједничко путовање.

Ово је математичко путовање засновано на причи коју сам измислио ја, Џејмс, и која није истинита.

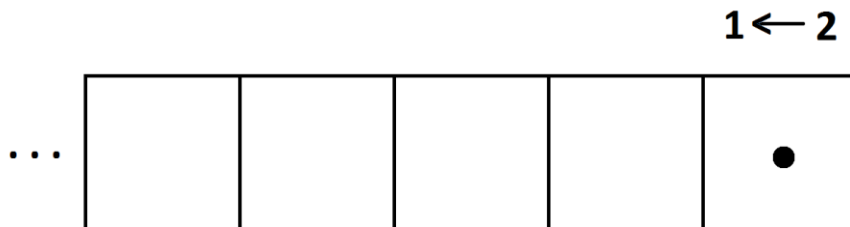
Када сам био мали, измислио сам машину – то није истина – а та машина се састоји само од низа кутија и може се продужавати са леве стране колико год вам је воља.

Смислио сам и име за ту моју машину. Назвао сам је машина „два у један“, што се и чита и пише на чудан начин, унатрашке. (Кад сам био мали нисам знао за боље.)



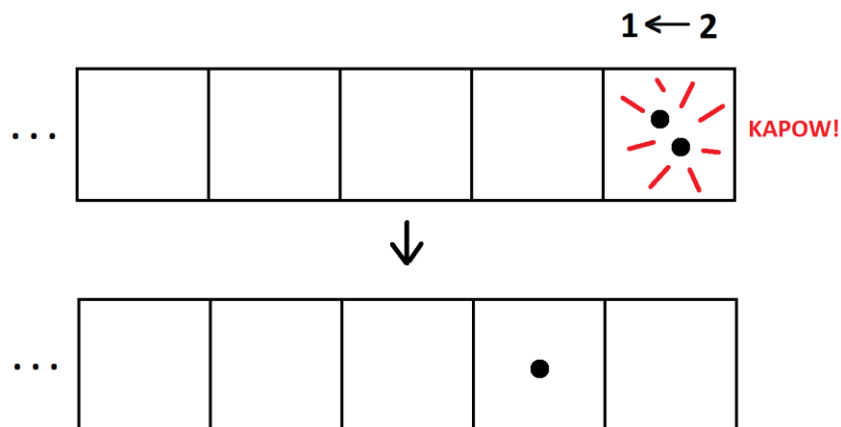
А шта се ради са том машином? У њу се убацују тачке. Тачке се увек стављају у прву кутију са десне стране.

Ставите једну тачку унутра, и... Па, ништа се неће десити: остаће унутра као једна тачка. Помало досадно!



Али, ставите унутра другу тачку – увек у прву кутију са десне стране – и тада ће се десити нешто узбудљиво.

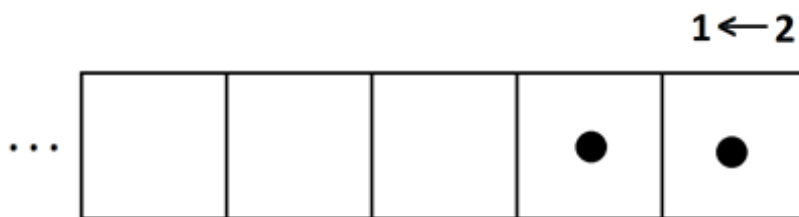
Када год се у кутији налазе две тачке, оне експлодирају и нестану - БУМ! – а замењује их једна тачка, која се појављује у суседној кутији са леве стране.



(Да ли примећујете зашто сам ову машину назвао „машина $1 \leftarrow 2$ “, и зашто сам то записао на тако чудан начин?)

Примећујемо да, када се у машину убаце две тачке, резултат чини једна тачка, и за њом нула тачака.

Када се унутра убаца трећа тачка – увек у прву кутију са десне стране – добија се слика једне тачке коју следи једна тачка.

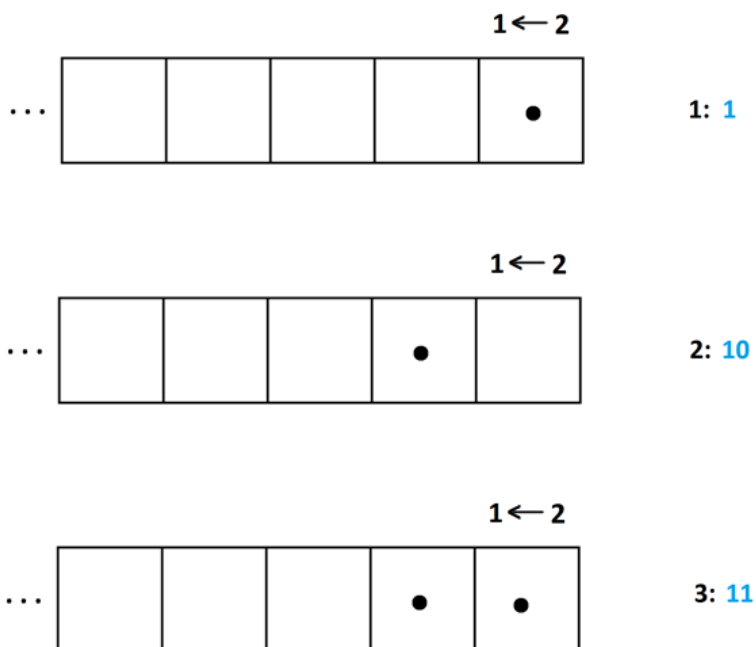


Схватио сам да ова машина из моје неистините приче, даје шифре за бројеве.

Ако се у машину убаца само једна тачка, она ће остати као једна тачка. Рећи ћемо да је шифра машине $1 \leftarrow 2$ за број један 1.

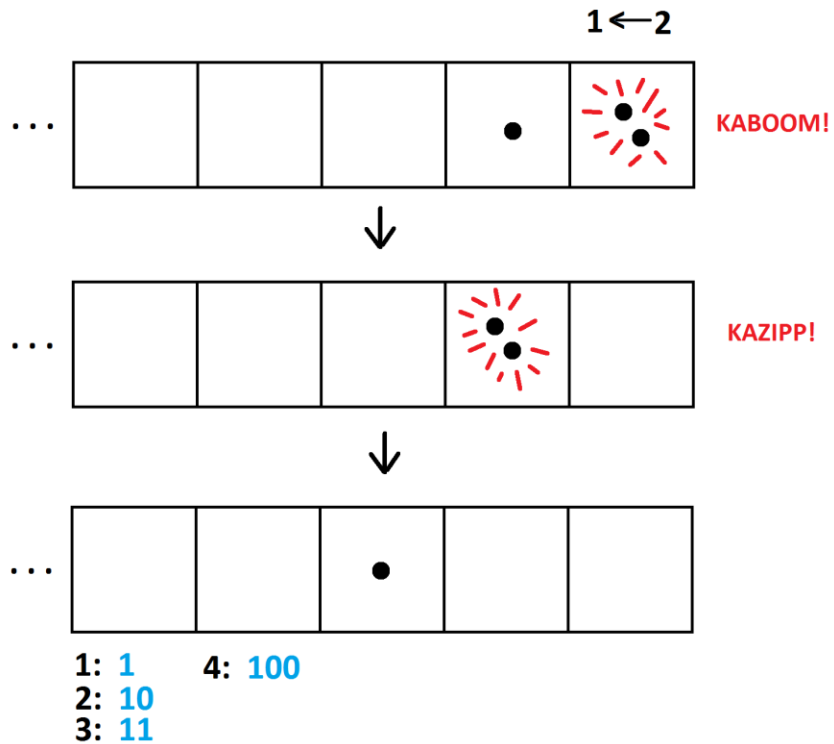
Две тачке убачене у машину једна за другом, резултирале су тиме да је у једној кутији била једна тачка, а следећа кутија је била празна. Рећи ћемо да је шифра машине $1 \leftarrow 2$ за број два 10.

Уколико се у машину дода и трећа тачка, добија се шифра 11 за број три.



Како гласи шифра машине $1 \leftarrow 2$ за број четири?

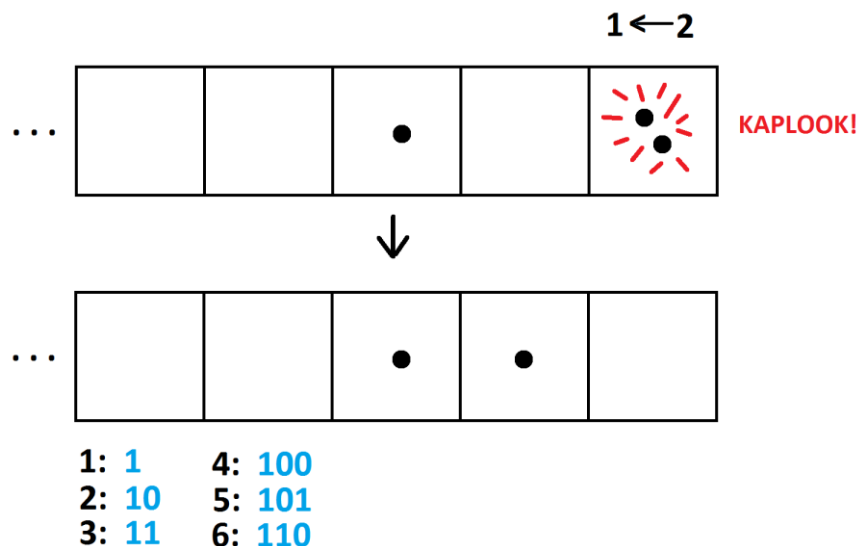
Додавање четврте тачке у машину посебно је узбдљиво: очекују нас вишеструке експлозије!



Шифра машине $1 \leftarrow 2$ за број четири је 100.

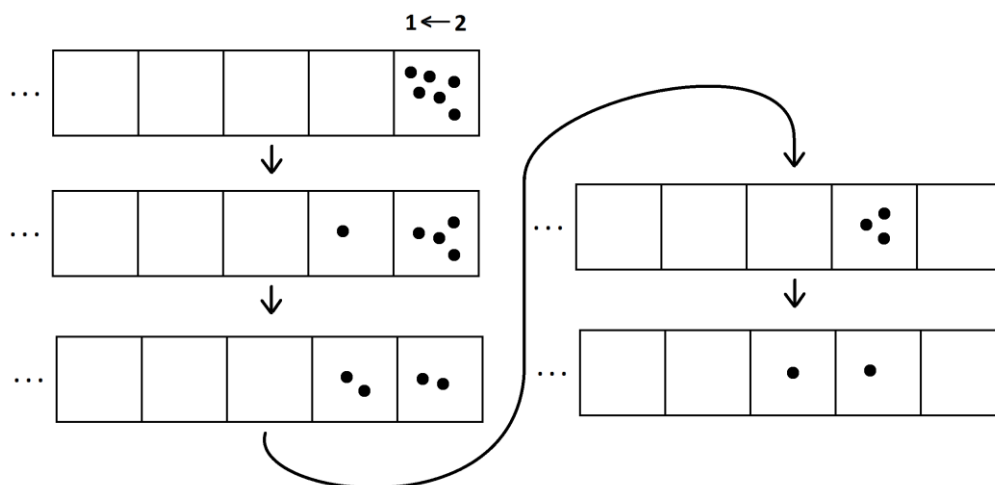
Шта ће бити шифра за број пет? Можете ли да видите да је одговор на то питање 101?

А шифра за број шест? Додавање још једне тачке на шифру за број пет даје шифру 110 за шест.



Заправо, ту шифру за број шест можемо да добијемо тако што ћемо испразнити машину и затим у њу ставити шест тачака одједном. Парови тачака ће експлодирати и сваки ће створити једну тачку у првој кутији са леве стране.

Ево једног могућег низа експлозија. Звучни ефекти су изостављени!



Да ли сте на крају добили исту шифру – 110, уколико су се експлозије дешавале другачијим редоследом? (Покушајте!)

Ево неких питања на која ћете можда пожелети да потражите одговоре, а можда и нећете. Моја решења на та питања наћи ћете на крају овог поглавља.

1. а) Како гласи шифра машине $1 \leftarrow 2$ за број тринаест?

(Испоставља се да је тражена шифра 1101. Можете ли сами да дођете до тог одговора?)

- b) Како гласи шифра за број педесет у овој машини? (Невероватно!)
2. Да ли неки број у машини $1 \leftarrow 2$ може да добије шифру 100211, под претпоставком да пустимо тачке да експлодирају кад год је то могуће?
3. Који број у машини $1 \leftarrow 2$ добија шифру 11001?

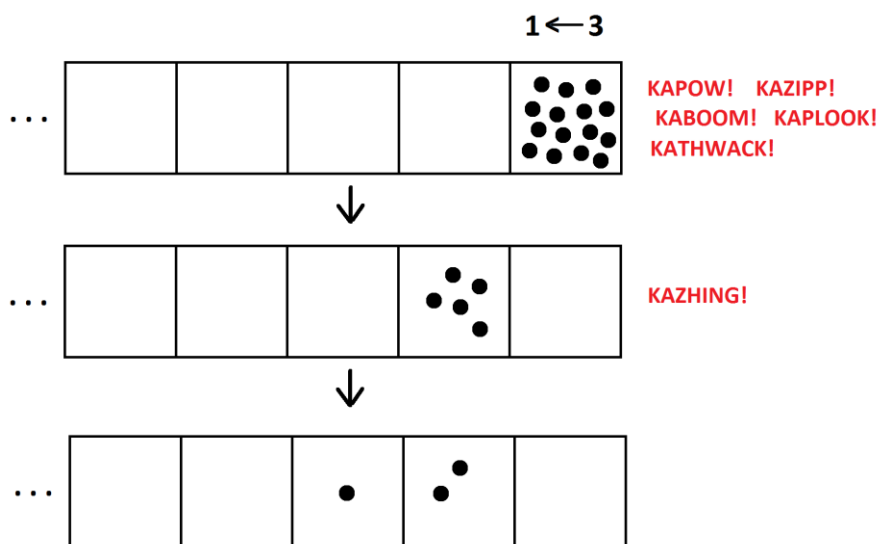
Чекају вас сати и сати забаве, уколико одлучите да се играте са шифрама у машини $1 \leftarrow 2$.

А онда ми је, једног дана, синула запањујућа идеја!

ДРУГЕ МАШИНЕ

Уместо да се играм машином $1 \leftarrow 2$, схватио сам да бих могао да се играм машином $1 \leftarrow 3$ (поново се пише и чита унатрашке, дакле, машином „три у један“). У овом случају, када год се у кутији налазе *три* тачке, оне експлодирају и замењује их једна тачка, која се појављује у суседној кутији са леве стране.

Погледајмо шта се дешава са петнаест тачака у машини $1 \leftarrow 3$.



Најпре ће се у првој кутији одиграти пет експлозија, и свака од њих ће за последицу имати појављивање једне тачке у другој кутији са десне стране. Затим ће три од тих пет тачака експлодирати, после чега ће у кутији остати две тачке, а једна нова тачка ће се појавити у првој следећој кутији са леве стране. Због тога је 120 шифра за број петнаест у машини $1 \leftarrow 3$.

Ево још неких питања о којима ћете можда хтети да размишљате, а можда и не.

4. а) Покажите да је 11 шифра за број четири у машини $1 \leftarrow 3$.
- б) Покажите да је 111 шифра за број тринаест у машини $1 \leftarrow 3$.
- с) Покажите да је 202 шифра за број двадесет у машини $1 \leftarrow 3$.

5. Да ли неки број може да добије шифру 2041 у машини $1 \leftarrow 3$? Ако је одговор позитиван, да ли би таква шифра била „стабилна“?
6. Који број у машини $1 \leftarrow 3$ добија шифру 10022?

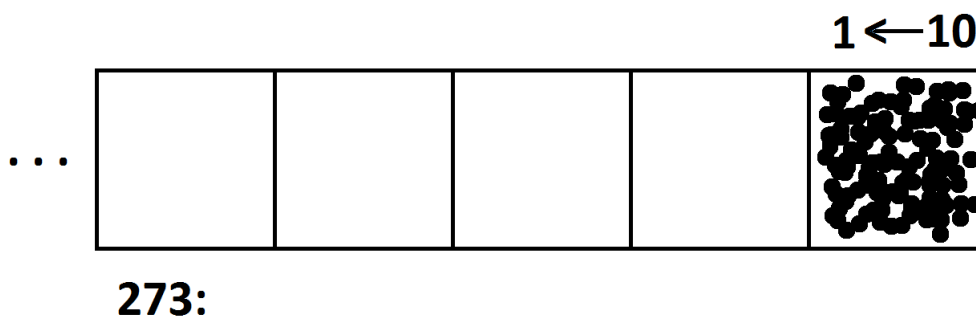
Можемо да наставимо!

7. Шта мислите, какво правило важи за машину $1 \leftarrow 4$?
Како гласи шифра машине $1 \leftarrow 4$ за број тринаест?
8. Како гласи шифра машине $1 \leftarrow 5$ за број тринаест?
9. Како гласи шифра машине $1 \leftarrow 9$ за број тринаест?
10. Како гласи шифра машине $1 \leftarrow 5$ за број дванаест?
11. Како гласи шифра машине $1 \leftarrow 9$ за број двадесет?

ОК. Хајде да претерамо.

Хајде да се чак позабавимо машином $1 \leftarrow 10$ и да у њу ставимо 273 тачке!

Како гласи тајна шифра машине $1 \leftarrow 10$ за број 273?



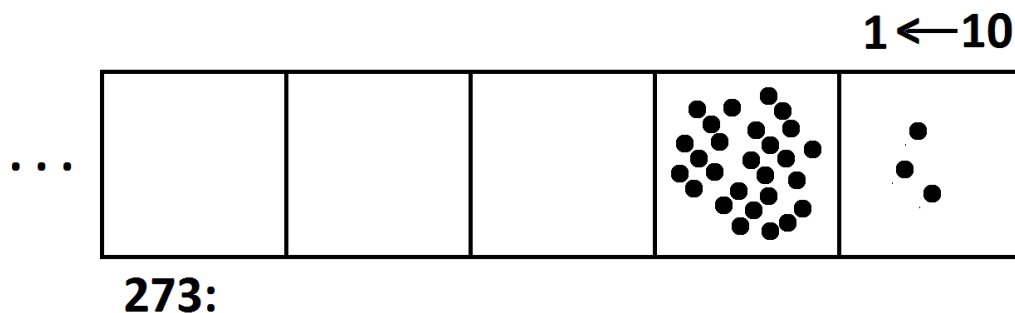
Разрешо сам ту ситуацију размишљајући и постављајући себи низ питања.

Да ли ће се десети неке експлозије? Да ли има неких група од по десет тачака које ће експлодирати? Сасвим сигурно!

Колико ће експлозија бити на почетку? Двадесет седам.

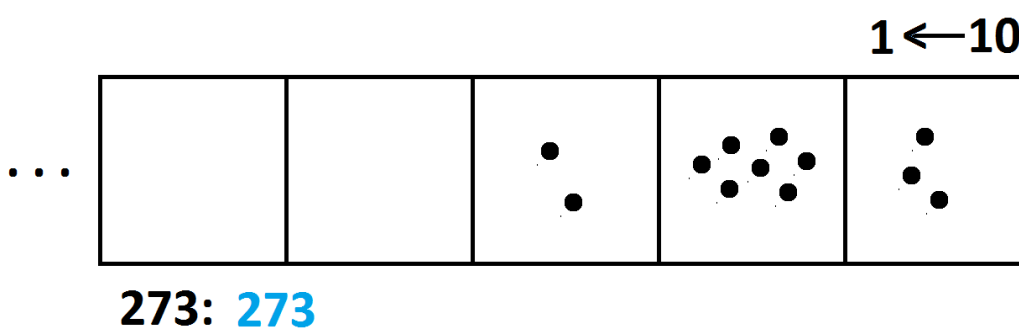
Да ли ће неке тачке остати у првој кутији? Да. Три.

У реду. Дакле, биће двадесет седам експлозија, и после сваке ће се у првој кутији са леве стране појавити једна тачка, при чему ће у полазној кутији остати три тачке.



Да ли ће бити још експлозија? Да. Још две.

Да ли су остале неке тачке као вишак? Остало је још седам тачака.



Шифра за број двеста седамдесет три у машини $1 \leftarrow 10$ је.... 273. Вау!

12. а) Како гласи шифра за број тринаест у машини $1 \leftarrow 10$?
- б) Како гласи шифра за број тридесет седам у машини $1 \leftarrow 10$?
- с) Како гласи шифра за број 5846 у машини $1 \leftarrow 10$?

Дешава се нешто чудно!

Које се важно питање намеће?



ФАНТАСТИЧНА ИСТРАЖИВАЊА

Следи неколико истраживања о „важним питањима“ на која ћете можда покушати да одговорите, или макар да размислите о њима. Све ће постати јасно како се прича буде развијала кроз наредна поглавља, али можда би било забавно да већ сада мало мозгате о овим идејама.

ИСТРАЖИВАЊЕ 1: ШТА РАДЕ ОВЕ МАШИНЕ?

Можете ли да откријете шта ове машине уствари раде?

Зашто је шифра за број двеста седамдесет три, у машини $1 \leftarrow 10$, баш „273“? Да ли ће све шифре које направи машина $1 \leftarrow 10$ сигурно бити идентичне нашем уобичајеном запису бројева?

Уколико можете да одговорите на то питање, да ли онда можете да разумете све шифре које даје машина $1 \leftarrow 2$? Шта значи да је 1101 шифра за број тринаест?

Коментар: Поглавље 2 даје одговоре на постављена питања.

ИСТРАЖИВАЊЕ 2: ДА ЛИ ЈЕ ВАЖНО КАКО СЕ ИЗАБЕРЕ РЕДОСЛЕД КОЈИМ ТАЧКЕ ЕКСПЛОДИРАЈУ?

Ставите деветнаест тачака у крајњу десну кутију машине $1 \leftarrow 2$ и пустите парове тачака да експлодирају случајним редоследом: прво изаберите неколико парова у крајњој десној кутији, па затим неколико у другој кутији са десна, и онда поново неколико у крајњој десној кутији, и опет неке из друге кутије, и тако даље. Поновите то, али овог пута промените редослед којим се одигравају експлозије. Па онда још једном!

Да ли ће се баш сваки пут на крају појавити иста шифра, 10011?

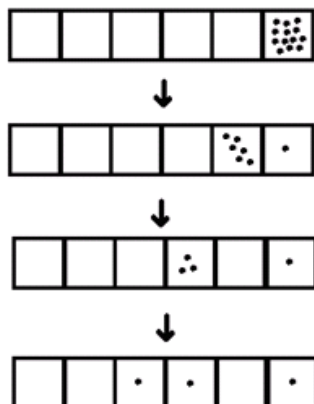


РЕШЕЊА

Као што сам и обећао, следе моји одговори на постављена питања.

1.

а) Ево како се добија шифра 1101, ако се почне са тринаест тачака.



б) Шифра за број педесет је 110010.

2. Под претпоставком да смо се договорили да ћемо пустити тачке да експлодирају кад год је то могуће, шифра 100211 није довршена, пошто две тачке које се налазе у трећој кутији са десне стране могу да експлодирају, па ће крајња шифра бити 101011.

3. Ово је шифра за број деветнаест. (У следећој лекцији научићемо како да то брзо увидимо.)

4. а) Покажите сами! б) Покажите и ово! с) Добро вам иде! Урадите и трећи задатак!

5. Као и малопре, уколико смо се сагласили да пустимо тачке да експлодирају када год је то могуће, онда ова шифра није потпуна: три тачке које се налазе у другој кутији са десне стране експлодираће и даће шифру 2101

6. Број тридесет пет је представљен наведеном шифром.

7. „Четири тачке у било којој кутији експлодирају и замењује их једна тачка у првој кутији са леве стране“. Број тринаест у машини $1 \leftarrow 4$ добија шифру 31.

8. 23

9. 14

10. 22

11. 22 (Шифра је иста као у претходном одговору, али је, наравно, тумачење те шифре другачије.)

12. а) 13 б) 37 с) 5846 (То су шифре које користимо за бројеве у свакодневном животу!)