



Uplifting Mathematics for All

ВЗРЫВАЮЩИЕСЯ ТОЧКИ

ГЛАВА 1

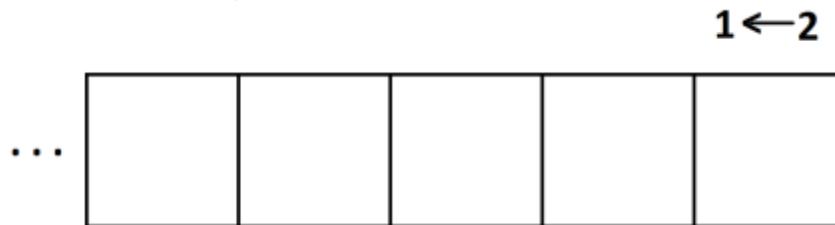
МАШИНЫ

Давайте отправимся в путешествие!

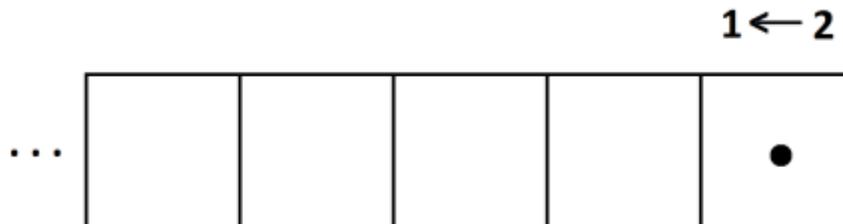
Это математическое путешествие основано на выдуманной истории обо мне, Джеймсе.

Когда я был маленький, я изобрел машину - не правда - и эта машина состояла всего-навсего из ряда клеток, которые простирались настолько вправо, насколько я хотел.

И я дал этой машине имя. Я назвал её "машина два-один" - именно так, в необычном обратном порядке (в детстве меня это не смущало).

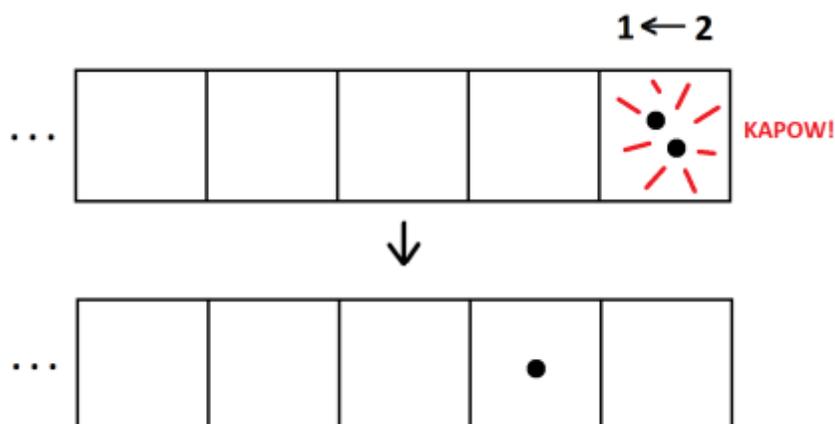


И что же можно делать с этой машиной? Можно класть в неё точки. Точки всегда кладутся в самую правую клетку. Положи одну точку - и, ничего не произойдет: она остаётся одной точкой. Хо хм!



Но положи вторую точку - всегда в самую правую клетку - и произойдет что-то захватывающее.

Когда две точки оказываются в одной клетке, они взрываются и исчезают - КАПАУ - и вместо них появляется одна точка, на одну клетку левее.



(Теперь ты видишь почему я назвал эту машину "машина $1 \leftarrow 2$ " - именно так, в необычном обратном порядке?)

Мы видим что две точки положенные в машину приводят к одной точке, за которой следуют ноль точек.

Положив третью точку - всегда в самую правую клетку - получаем одну точку за которой следует еще одна.

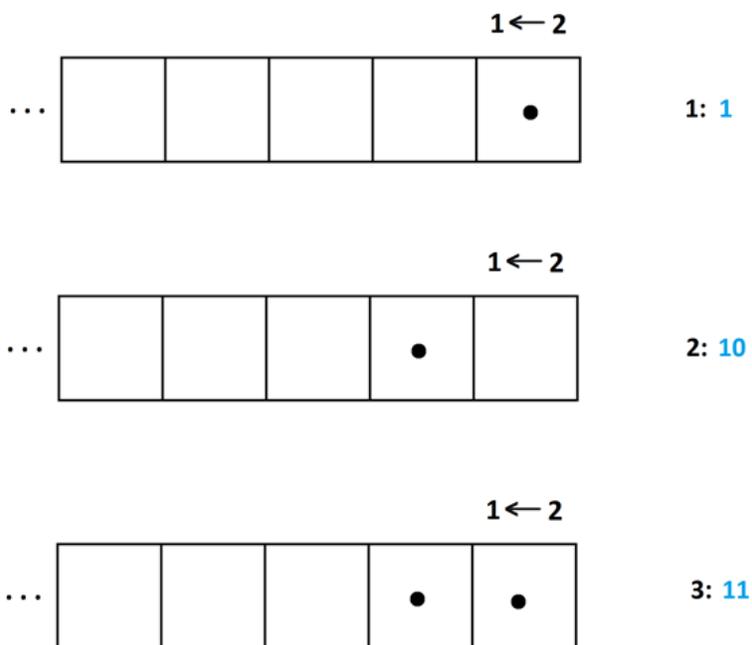


Я осознал что эта машина, в моей выдуманной истории, производила шифровки для чисел.

Просто одна точка положенная в машину оставалась одной точкой. Скажем что шифр машины два-один для числа один - это 1.

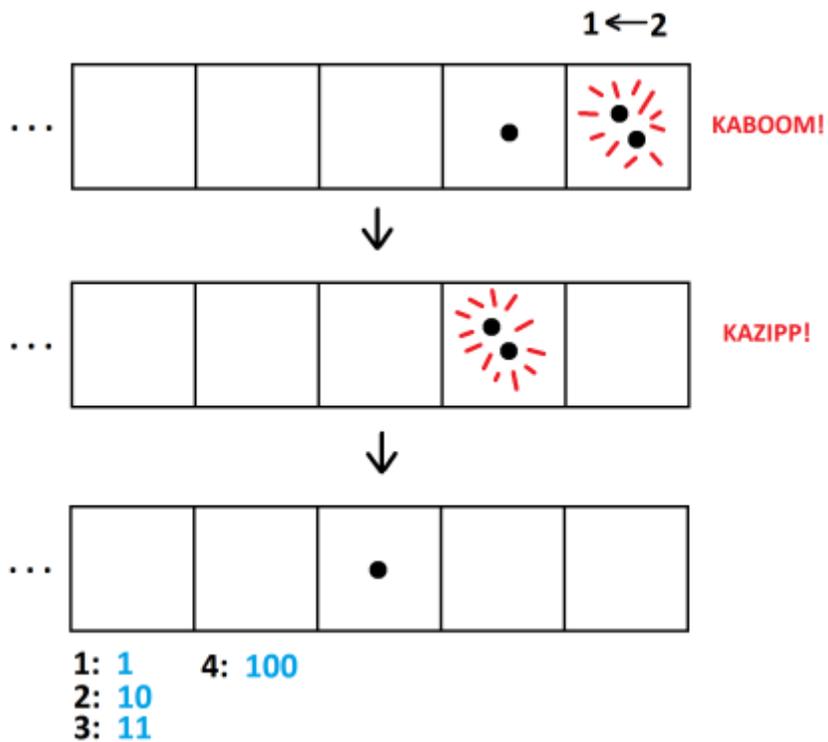
Две точки положенные в машину, одна за другой, превращались в одну точку в одной клетке, за которой следовала клетка с нулем точек. Скажем что шифр машины два-один для числа два - это 10.

Положив третью точку в машину, получаем шифр 11 для числа три.



Какой шифр машины $1 \leftarrow 2$ для числа четыре?

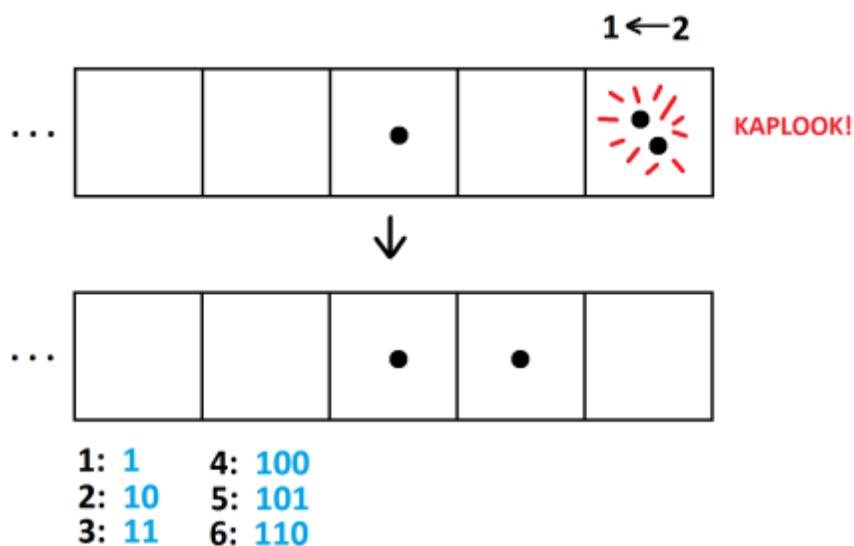
Класть четвертую точку в машину особенно заворожительно: нас ждут многократные взрывы!



Шифр машины $1 \leftarrow 2$ для четырех, 100.

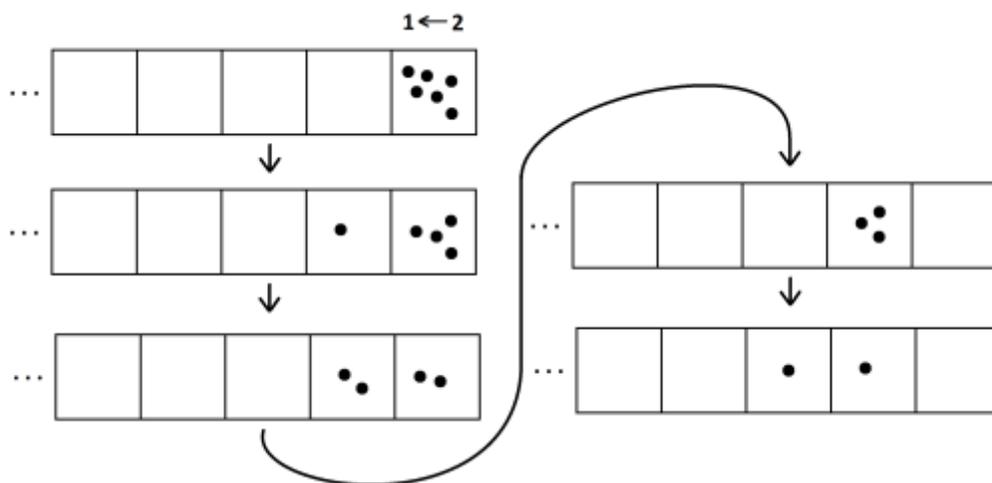
Какой будет шифр для пяти? Ты видишь что это 101?

А для шести? Добавляя еще одну точку к шифру для пяти получаем 110.



На самом деле, мы можем получить шифр для шести опустошив машину и потом положив в нее все шесть точек одновременно. Пары точек взорвутся по очереди и каждая пара произведет одну точку, одной клеткой влево.

Вот одна возможная последовательность взрывов - без звуковых эффектов!



Получится ли шифр 110 если взрывать точки в другом порядке? (Попробуй!)

Вот несколько задач которые ты можешь попробовать решить. Ты найдешь мои решения в конце этой главы.

1. а) Какой шифр машины $1 \leftarrow 2$ для числа тринадцать?
(Ответ 1101. Ты можешь его произвести?)
- б) А какой шифр у пятидесяти в этой машине? (Ого!)
2. А может ли у числа быть шифр 100211 в машине $1 \leftarrow 2$, предполагая что точки всегда взрываются когда могут?
3. У какого числа шифр 10011 в машине $1 \leftarrow 2$ machine?

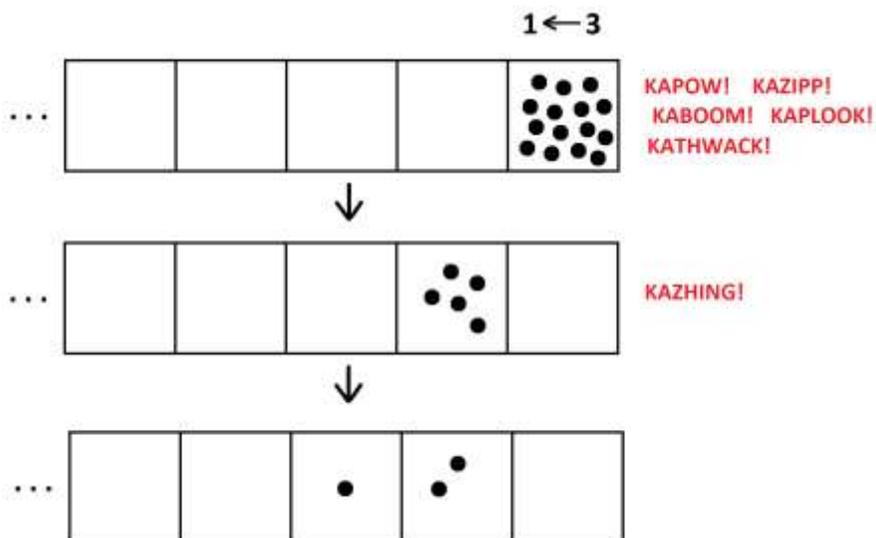
С машиной два-один можно играть часами.

Но однажды на меня снизошло невероятное озарение.

Другие машины

Вместо того чтобы играть с машиной $1 \leftarrow 2$, я осознал что я могу поиграть с машиной $1 \leftarrow 3$ (пишется и читается опять в обратном порядке, машина "три-один"). В этой машине, когда в клетке находятся три точки, они взрываются и заменяются одной точкой в клетке на одну левее.

Вот что происходит с пятнадцатью точками в машине $1 \leftarrow 3$.



Сначала совершаются пять взрывов в первой клетке, с каждым взрывом создавая одну точку во второй клетке слева. Потом три из этих точек взрываются и исчезают. Это оставляет две точки и создает одну новую точку одной клеткой левее. Так мы получаем 120 как шифр пятнадцати в машине $1 \leftarrow 3$.

Вот еще несколько вопросов над которыми ты можешь захотеть (или не захотеть) поразмышлять.

4. а) Покажи что шифр числа четыре в машине $1 \leftarrow 3$ это 11.
 б) Покажи что шифр числа тринадцать в машине $1 \leftarrow 3$ это 111.
 с) Покажи что шифр числа двадцать в машине $1 \leftarrow 3$ это 202.
5. Может ли шифр числа в машине $1 \leftarrow 3$ быть 2041? Если да, то будет ли этот шифр "стабильным"?
6. У какого числа шифр 1022 в машине $1 \leftarrow 3$?

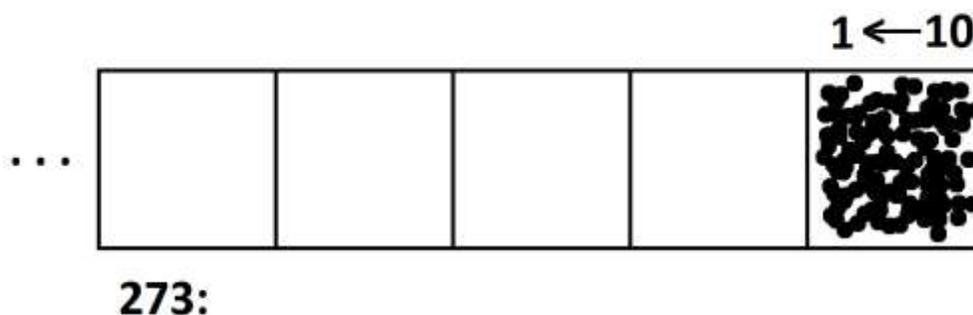
Мы можем продолжить!

7. Какое ты думаешь правило машины $1 \leftarrow 4$?
 Какой шифр числа тринадцать в машине $1 \leftarrow 4$?
8. Какой шифр числа тринадцать в машине $1 \leftarrow 5$?
9. Какой шифр числа тринадцать в машине $1 \leftarrow 9$?
10. Какой шифр числа двенадцать в машине $1 \leftarrow 5$?
11. Какой шифр числа двадцать в машине $1 \leftarrow 9$?

Отлично. Полный вперед!

Доберемся до машины $1 \leftarrow 10$ и положим в нее 273 точки.

Какой секретный шифр машины $1 \leftarrow 10$ для числа 273?



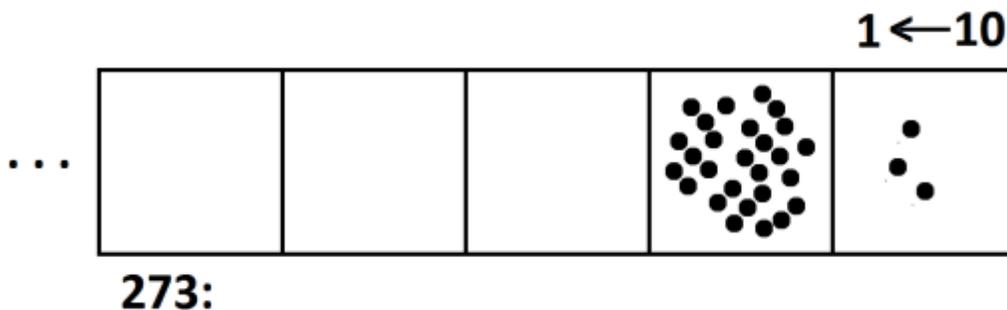
Чтобы разобраться с этим, я задал задавая себе серию вопросов.

Будут ли взрывы? Есть ли группы из десяти точек которые взорвутся? Безусловно!

Сколько взрывов будет изначально? Двадцать-семь.

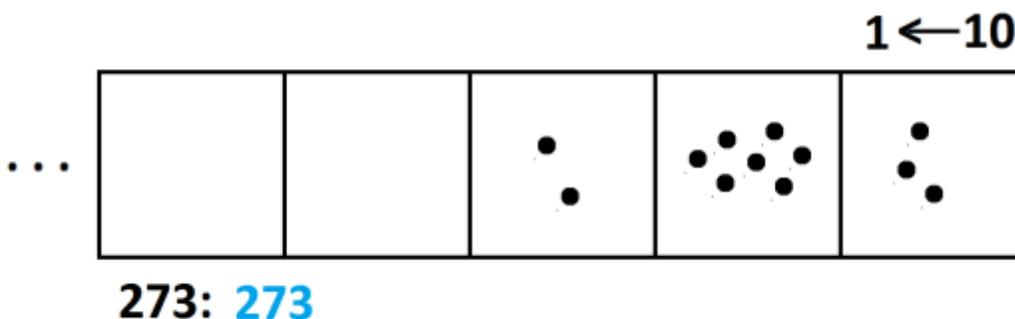
Будут ли оставаться точки? Да. Три.

Хорошо. Значит происходит двадцать-семь взрывов, каждый производит одну точку одной клеткой влево, оставляя три точки на месте.



Еще взрывы? Да. Еще два.

Какие-то точки остались? Да. Семь осталось на месте.



Шифр числа двести семьдесят три в машине $1 \leftarrow 10$...273. Ух ты!

12. а) Какой шифр числа тринадцать в машине $1 \leftarrow 10$?
- б) Какой шифр числа тридцать-семь в машине $1 \leftarrow 10$?
- в) Какой шифр числа 5846 в этой машине?

Что-то занятное происходит!

Какой здесь напрашивается вопрос?



Вольные исследования

Вот несколько "больших вопросов" которые ты можешь захочешь исследовать или обдумать. Все станет ясно в следующих главах, но пока может быть интересно просто о них поразмышлять.

ИССЛЕДОВАНИЕ 1: ЧТО ЭТИ МАШИНЫ ДЕЛАЮТ?

Ты догадался, что эти машины на самом деле делают?

Почему шифр для двести семидесяти трех в машине $1 \leftarrow 10$ "273"? Все ли числа в машине $1 \leftarrow 10$ обязательно идентичны тому как мы обычно пишем числа?

Если ты смог ответить на этот вопрос, то можешь ли ты также разъяснить все шифры машины $1 \leftarrow 2$? Что означает шифр 1101 для числа тринадцать?

Примечание: Ответы на эти вопросы находятся во второй главе.

ИССЛЕДОВАНИЕ 2: ВАЖЕН ЛИ ПОРЯДОК В КОТОРОМ ТОЧКИ ВЗРЫВАЮТСЯ?

Положи девятнадцать точек в самую правую клетку машины $1 \leftarrow 2$ и взрывавай пары точек в случайном порядке: взорви несколько пар в самой правой клетке, потом несколько во второй справа клетке, потом еще несколько в самой правой, а потом еще несколько во второй, и так далее. Повтори еще раз, но в этот раз поменяй порядок в котором ты взрываешь пары. А потом еще раз!

Получается ли один и тот же шифр 10011 каждый раз?

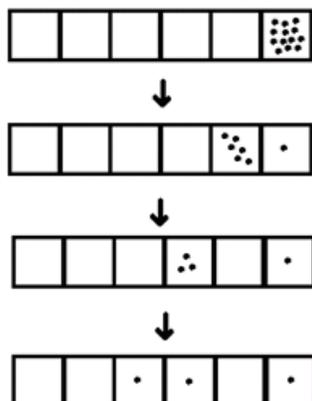


ОТВЕТЫ

Как было обещано, вот ответы на поставленные вопросы.

1.

a) Вот как шифр 1101 появляется из тринадцати точек.



b) У числа пятьдесят шифр 110010.

2. Если мы договорились взрывать точки всегда когда это возможно, то шифр 100211 не окончательный: две точки в третьей слева клетке могут взорваться и привести к финальному шифру 101011.

3. Это шифр числа девятнадцать. (Мы узнаем быстрый способ это понять в следующем уроке.)

4. a) Сделай сам! б) И этот тоже! c) Ты - крут! Сделай и этот!

5. Опять таки, если мы договоримся взрывать точки когда можем, то этот шифр не окончательный: три точки во второй клетке с конца могут взорваться и привести к результату 2111.

6. Это шифр числа тридцать пять.

7. "Четыре точки в любой клетке взрываются и заменяются одной точкой одной клеткой влево." У числа 13 шифр 31 в машине $1 \leftarrow 4$.

8. 23

9. 14

10. 22

11. 22 (Тот же шифр что и в предыдущем ответе - но, конечно, интерпретация шифра другая.)

12. a) 13 б) 37 c) 5846 (Это шифры которые мы используем в каждодневной жизни!)